

FISICAST

S^{per}X^T

Il GPS

di
Giovanni Organtini



II GPS

Giovanni Organtini

Abstract:

La teoria della relatività ha sempre attratto curiosità da parte del pubblico, anche per le strabilianti previsioni su fenomeni come la dilatazione dei tempi, la contrazione delle lunghezze e la curvatura dello spazio-tempo. Nonostante la grande popolarità, tuttavia, gli effetti previsti da questa teoria sono per lo più ritenuti di scarso o nullo interesse pratico. In questa puntata di Fisicast vi convinceremo del contrario: la fisica della relatività è molto più presente nella vita quotidiana di quanto abbiate mai creduto.

INIZIO

Scena, da "Totò , Peppino e la Malafemmina" (vedi allegato).

Quella che avete ascoltato è una gustosissima scenetta di uno dei capolavori della cinematografia italiana: Totò, Peppino e la Malafemmina. Una scena come questa poteva essere girata solo fino a qualche anno fa. Oggi, infatti, nell'era dei navigatori satellitari, sarebbe difficile da immaginare. Oggi ne parlano in Fisicast i Proff. Faccini e Organtini del Dipartimento di Fisica dell'Università di Roma "Sapienza". Pochi immaginano che i navigatori satellitari, oggetti di uso così comune, funzionino anche grazie alle più moderne teorie della fisica, inclusa la teoria della relatività, dai più percepita come assolutamente estranea alla vita quotidiana: una teoria i cui effetti si possono verificare solo in complicati esperimenti condotti in sofisticati laboratori, di nessun interesse pratico. Al massimo, buona da citare in qualche film di fantascienza.

Intervallo

G: E' proprio così. In realtà illustrando i principi di funzionamento di un navigatore satellitare ci si potrebbe scrivere un intero trattato di fisica.

R: E di matematica...

G: Hai ragione, perché innanzi tutto il navigatore deve determinare la sua posizione risolvendo un sistema di equazioni...sai come fa, no?

R: Sì. Il navigatore riceve segnali radio da alcuni satelliti che si trovano in orbita attorno alla Terra e in questo modo, attraverso un processo chiamato trilaterazione, calcola la propria posizione.

G: Funziona un po' come quando ti trovi davanti a un cartello stradale che indica le distanze da alcune località. Se sai, ad esempio, di trovarti a 8 km di distanza da, che so, Luco dei Marsi, vuol dire che ti trovi su uno qualunque dei punti che formano una circonferenza di raggio 8 km, centrata in Luco dei Marsi.

R: Sarà utile, ma non certo sufficiente a sapere dove sono.

G: Infatti non basta. Ti serve un'altra informazione. Supponi di sapere anche di stare a 10 km da Avezzano. Questo vuol dire che devi trovarti su uno qualunque dei punti di

una circonferenza di raggio 10 km centrata su Avezzano.

R: Ma se devo essere contemporaneamente su una circonferenza e sull'altra significa che devo trovarmi in uno dei punti in cui le due circonferenze si intersecano.

G: Appunto. Poiché due circonferenze possono intersecarsi al massimo in due punti, sei certo di trovarti sull'uno o sull'altro.

R: E come fai a sapere in quale dei due punti ti trovi?.

G: Ti basta sapere la distanza da una terza località. In questo modo devi trovarti sull'unico punto nel quale tre circonferenze, ciascuna centrata su una diversa località, si intersecano.

R: Chiaro.

G: Il GPS funziona nello stesso modo, ma in tre dimensioni. Ogni satellite trasmette, via radio e in continuazione, la propria posizione rispetto a un sistema di riferimento con l'origine nel centro della Terra. Conoscendo la distanza da ciascun satellite puoi determinare la tua posizione trovando il punto in cui tre sfere, ciascuna centrata su uno dei satelliti, si intersecano.

R: Un momento: tre sfere si intersecano in un punto?

G: No. In effetti possono intersecarsi in due punti. L'intersezione tra due sfere, infatti, dà origine a una circonferenza (pensa a due bolle di sapone che si toccano). Se fai passare questa circonferenza attraverso la superficie di una terza sfera questa può attraversarla in due punti.

R: Dunque ti serve un quarto satellite?

G: No. Perché dei due punti trovati, uno si trova sulla superficie terrestre, mentre l'altro si trova molto lontano, nello spazio. Dunque lo puoi escludere facilmente.

R: Ok, ma per fare tutto questo ho bisogno, oltre che della posizione dei satelliti, della loro distanza. Chi me la dice?

G: La misuri. Ogni satellite porta a bordo un orologio atomico e, oltre a inviare la propria posizione, comunica a Terra anche l'istante di tempo in cui quest'informazione è partita dal satellite. Anche il navigatore ha al suo interno un orologio e può misurare l'istante di tempo in cui il segnale arriva.

R: Perciò posso calcolare la differenza dei tempi di arrivo e partenza e sapere per quanto tempo il segnale ha viaggiato per arrivare fino a me.

G: Esatto. I segnali radio viaggiano alla velocità della luce, che è di 300000 km/s...

R: Dunque ogni millesimo di secondo trascorso corrisponde a una distanza di 300 km. E così posso sapere a quale distanza si trova ciascun satellite.

G: Cio' nonostante ti serve un quarto satellite per determinare con precisione la tua posizione.

R: E perche'?

Intervallo: la belva umana (vedi allegato)

G: E' abbastanza ovvio che, per funzionare, tutti gli orologi (quelli di bordo dei satelliti e quello del tuo navigatore) devono essere perfettamente sincronizzati, non come quelli degli uomini del Commissario Auricchio (alias Lino Banfi) nel film "Fracchia, la belva umana". I satelliti montano orologi atomici, mentre il povero navigatore, che costa un centinaio di euro, ne ha uno al quarzo, che non è abbastanza accurato, cioè può andare avanti o indietro, anche se di pochissimo, rispetto a quello del sistema GPS. Come hai appena detto tu, un errore di un millesimo di secondo corrisponde a un'indeterminazione nella distanza pari a 300 km!

R: E allora?

G: Allora puoi ottenere posizione e distanza da un quarto satellite e confrontare i dati con quelli degli altri tre. Le discrepanze che inevitabilmente troverai ti permetteranno di determinare con la precisione dovuta la tua posizione.

R: Ho capito. Dal punto di vista matematico il tuo problema consiste nel determinare

quattro incognite: le tre coordinate spaziali della tua posizione e il ritardo (o l'anticipo) del tuo orologio rispetto a quelli di bordo dei satelliti. Devi dunque risolvere un sistema con quattro equazioni...

G: Che sono quelle che ti danno la distanza da ciascun satellite in funzione delle incognite, che sono le tue coordinate spaziali e il ritardo (o l'anticipo) del tuo orologio, rispetto a quelli di bordo.

Intervallo:

R: Geniale. Ma non capisco che c'entra la relatività.

G: Mai sentito parlare di dilatazione dei tempi?

R: Naturalmente. È quel fenomeno, previsto dalla teoria della relatività di Einstein, che consiste nel fatto che, se osservo un orologio marciare a bordo di qualcosa che si muove rispetto a me, lo vedo andare più lentamente.

G: Possiamo dire, a tutti gli effetti, che la teoria prevede che quando osserviamo i fenomeni che avvengono a bordo di un sistema in moto, per noi è come se in esso il tempo scorresse più lentamente.

R: Sì, ma le differenze di tempo dipendono dal rapporto tra la velocità del sistema e quella della luce e quindi, in pratica, sono sempre talmente piccole che non sono misurabili se non con sofisticati strumenti da laboratorio.

G: Non è vero. I satelliti GPS si muovono, rispetto a noi, con una velocità di circa 4 km/s. La teoria della relatività ti permette di calcolare il ritardo con il quale tu vedi marciare gli orologi di bordo.

R: La teoria dice che il tempo a bordo si "allunga" di un fattore gamma che è l'inverso della radice di uno meno la velocità del sistema, misurata in unità della velocità della luce, al quadrato. In pratica gli orologi di bordo sembrano andare indietro, ma di pochissimo, di una quantità impercettibile.

G: Ok. Se fai due conti vedi che il fattore gamma differisce da uno per circa un decimo di miliardesimo.

R: L'avevo detto io. Se il fattore di dilatazione è così piccolo significa che ogni secondo che passa sul satellite, corrisponde a un secondo più un decimo di miliardesimo di secondo a Terra. La differenza è di appena due decimi di miliardesimo di secondo e in questo tempo la luce percorre...6 cm! Questo significa che io vedo il satellite come se si trovasse a una distanza di soli 6 cm in più rispetto alla sua distanza nominale. A proposito, quant'è in media questa distanza?

G: I satelliti orbitano a circa 20000 km dalla superficie terrestre.

R: E cosa vuoi che siano 6 cm rispetto ai 20000 km?

G: Il problema è che questo errore si cumula col tempo. Prova a calcolare a quanto ammonta il ritardo con il quale gli orologi di bordo sembrano andare dopo un giorno di volo.

R: In un giorno ci sono 86400 secondi, facciamo 100000 per semplicità. Questo significa che dopo un giorno di volo, il ritardo accumulato è di...due decimi di miliardesimo per centomila...venti milionesimi di secondo.

G: Vedi? In questo tempo la luce percorre 6 km (ricordi che 300 km corrispondono a un millesimo di secondo?).

R: E questo si traduce, grosso modo, in un errore nella mia posizione di altrettanto.

G: Esatto. E ti sembra utile un navigatore che fornisca la tua posizione con un'indeterminazione di qualche km?

R: Decisamente no.

Intervallo

G: E pensa che questo non è il solo effetto relativistico. Questo è l'effetto della cosiddetta relatività speciale o ristretta...

R: Vuoi dire che ce n'è anche uno di relatività generale?

G: Già. La relatività generale è quella teoria che dice che le masse sono responsabili della curvatura dello spazio-tempo e che le diverse forze di attrazione gravitazionale sono dovute essenzialmente alla diversa curvatura che lo spazio-tempo assume nelle vicinanze dei corpi: maggiore è la massa del corpo, maggiore è la curvatura dello spazio-tempo e dunque maggiore è l'intensità della forza gravitazionale.

R: Sembra di parlare di fantascienza. Che c'entra con il GPS?

G: Se lo spazio-tempo attorno alla Terra è curvo, le distanze tra due punti cambiano. Immagina di avere due punti, di cui conosci la distanza, su un foglio di carta, piatto. Se pieghi il foglio i due punti si avvicinano e la loro distanza cambia. Ma se continui a misurarla muovendoti sul foglio di carta ti appare più lunga di quella che in realtà è.

R: Vuoi dire che la curvatura dello spazio-tempo prodotta dalla Terra è tale da produrre un effetto apprezzabile sulla misura delle distanze?

G: Certo. L'effetto dipende dall'intensità del potenziale gravitazionale, che come sai diminuisce con la distanza dal centro della Terra. Il potenziale gravitazionale sulla superficie terrestre è perciò più grande di quello alla quota dei satelliti.

R: E questo come influisce sulla misura di distanza?

G: La relatività generale prevede che in questo caso la distanza tra un osservatore a Terra e un satellite a 20000 km di distanza si accorci un pochino.

R: Prima si allungava di 3 cm ogni secondo. E ora si accorcia. Quindi si compensa?

G: No. Per facilitare il confronto, puoi tradurre l'effetto in termini temporali. Tu infatti misuri le distanze moltiplicando la velocità della luce per il tempo trascorso per l'invio del segnale. Vicino la Terra lo spazio-tempo è molto più curvo e le distanze appaiono più lunghe. E' come se il tempo rallentasse. Al contrario, alla quota dei satelliti, lo spazio-tempo è meno curvo ed è come se il tempo rallentasse sì, ma meno che sulla Terra. L'effetto netto è che a te che sei sulla Terra il tempo a bordo del satellite sembra accelerato. Dunque misuri tempi più brevi di quelli che in realtà trascorrono a bordo del satellite e questo si traduce in una distanza minore. L'accorciamento delle distanze previsto dalla teoria della relatività corrisponde a un "anticipo" degli orologi di bordo di circa 7 miliardesimi di secondo.

R: Però! Questo significa che la differenza netta tra la durata di un secondo misurato a Terra e a bordo dei satelliti è di...7 meno 2... 5 miliardesimi di secondo.

G: Corrispondenti a circa 15 km di errore dopo appena un giorno di volo.

Intervallo

R: Ma allora come si fa? I navigatori funzionano, nonostante quel che dice Einstein! Vuol dire che la teoria è sbagliata?

G: No. La teoria funziona eccome! Tanto che occorre correggere quest'effetto. Per farlo si usa un semplice trucco: quando sono in volo gli orologi di bordo appaiono marciare più rapidamente rispetto a quelli a Terra (vanno avanti, come abbiamo visto, di 5 miliardesimi di secondo ogni secondo). Prima di partire, allora, gli orologi di bordo vengono starati, in modo da farli marciare più lentamente quel tanto che basta per riportarli in sincrono con gli orologi terrestri quando sono in orbita. Le piccole differenze residue si correggono via software tramite appositi algoritmi installati sui computer di bordo.

R: Dunque quando uso un navigatore GPS sto applicando la teoria della relatività.

G È proprio così. L'avresti mai creduto?

R: Fantastico. Prestami il navigatore che devo proprio fare lezione una lezione sulla relatività'...

FINE

