

FISICAST

SxT
per

Il Caos Deterministico

di
Giovanni De Cesare



Il Caos Deterministico

Giovanni De Cesare

Abstract:

Cosa c'entra una farfalla con il Caos Deterministico? Fu Lorenz, uno dei fondatori della teoria del Caos, che usò la metafora del battito d'ali di una farfalla per spiegare il concetto di dipendenza dalle condizioni iniziali, una proprietà comune a sistemi complessi come il fumo di una sigaretta, l'atmosfera della Terra, o gli anelli di Saturno. Nel linguaggio comune al termine Caos è spesso dato un significato negativo, in contrapposizione al concetto di ordine. Quello che invece gli scienziati intendono con Caos Deterministico è l'emergere dell'ordine in sistemi complessi.

INIZIO

Oggi intervistiamo il Dr. Giovanni De Cesare, ricercatore presso l'Istituto Nazionale di Astrofisica, che ci parlerà del Caos Deterministico.

Q: Ci potresti spiegare cos'è il Caos Deterministico?

A: Vedi, a differenza di quello che accade nel linguaggio comune, ora, parlando di Scienza, dobbiamo dare un significato molto preciso ai termini che stiamo usando. Per rispondere alla tua domanda dobbiamo quindi chiarire il significato scientifico di queste due parole: Caos e Determinismo. Immagino che tu abbia già un'idea di cosa significhi la parola Caos.

Q: Certo, Caos significa disordine. Per esempio, la mia camera è caotica perché vestiti, libri, e oggetti vari si trovano sparsi in modo disordinato un po' ovunque. È questo che voi intendete con Caos? La Scienza mi aiuterà a trovare un maglione che ho perso a causa del mio disordine?

A: Purtroppo ti devo comunicare una brutta notizia: la Scienza non ti potrà aiutare a ritrovare il tuo maglione. L'esempio che hai fatto però non ha a che vedere con il Caos Deterministico. Piuttosto descrive un sistema con un numero molto grande di oggetti, così come un gas è costituito da un numero grandissimo di molecole. In questo caso l'esperienza ci insegna che se il numero di oggetti nella tua stanza è molto grande sarà difficile ritrovare il tuo maglione. La ragione è che, se la tua stanza è in disordine, la probabilità di trovare un oggetto in un punto preciso è piccola. Quello che chiamiamo CAOS è invece un fenomeno che si manifesta a partire da modelli, apparentemente semplici, in cui il concetto di probabilità è assente.

Q: Quali modelli?

A: Vedi, quando vogliamo comprendere scientificamente un fenomeno naturale, sia esso fisico, chimico o biologico, o anche un fenomeno economico o sociale, dobbiamo partire da un modello matematico.

Q: Cos'è un modello matematico?

A: Possiamo dire che è la traduzione in formule matematiche delle proprietà del sistema che vogliamo studiare. Considera questo esempio: ho un allevamento di conigli il cui numero raddoppia ogni anno. In questo caso, posso descrivere la sua crescita con la semplice formula del raddoppio: $\text{conigli_nell'anno_successivo} = \text{conigli_nell'anno_in_corso} \times 2$. Come vedi la formula si compone soltanto di due quantità: il numero di conigli, che descrive lo "stato del sistema", e il numero 2 per cui lo moltiplico, detto "fattore di crescita", che indica di quanto cambia la popolazione nel corso di un anno. Questo semplice modello matematico è chiamato "sistema dinamico", perché lo stato del sistema in un dato momento determina in modo univoco lo stato in ogni momento successivo. Vedi subito quanto è utile avere un modello matematico: nel nostro caso per esempio ti fa vedere come mi basti conoscere il valore del fattore di crescita del mio allevamento per sapere quanti conigli avrò nei prossimi anni! Il fattore di crescita sintetizza in un solo numero tutto quel che accade nel corso dell'anno: nascite, decessi, acquisti, permute, ecc. per questo si fanno i modelli matematici: per schematizzare un fenomeno complesso con pochi parametri. Mi segui?

Q: Certo, ti seguo. Nel caso che hai descritto, se l'allevamento il primo anno ha due conigli, il secondo ne avrà 4, il terzo 8, il quarto 16, e così via...

A: Benissimo, hai già dimostrato di avere dimestichezza con un modello matematico. Potremmo chiamarlo il "modello del raddoppio della popolazione dei conigli"! Questo però non è chiaramente un modello realistico, il numero di conigli crescerebbe in modo esponenziale: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, eccetera. Puoi usare una calcolatrice per vedere che bei numeri verrebbero fuori in una ventina di anni. In generale dobbiamo pensare a un modello che descriva in modo più realistico la crescita del numero di conigli del nostro allevamento. Quello che bisogna tenere in mente è che se conosciamo il numero di conigli in un dato anno (per esempio nel 2013) il modello è semplicemente una formula matematica che ci permette di calcolare questo numero nell'anno successivo.

Q: E quindi?

A: Quindi sono stati inventati modelli abbastanza accurati per descrivere la crescita o la decrescita delle popolazioni, che tengono conto anche dell'esistenza di risorse di cibo limitate e della presenza di predatori. Un notevole progresso in questa direzione fu fatto già nella prima metà dell'Ottocento, quando si intuì che il tasso di crescita di una popolazione di animali non può essere costante come nell'esempio che abbiamo discusso, ma decresce all'aumentare della popolazione, cioè tanto più una popolazione è grande, tanto meno cresce di anno in anno... Semplice, no?

Q: In effetti sembra ragionevole. Ma questo cosa c'entra con il Caos?

A: C'entra. A partire da un semplice modello - noto come mappa logistica - che descrive la crescita di una popolazione in presenza di risorse limitate, si possono studiare proprietà, che chiamiamo caotiche, che sono comuni a moltissimi altri sistemi studiati in Fisica, in Chimica, in Biologia, o in economia. Vedi, la Scienza del Caos, secondo il parere di alcuni, non può essere considerata una teoria in senso tradizionale, ma piuttosto come un insieme di strumenti concettuali che ci permettono di comprendere fenomeni comuni a discipline che apparentemente non hanno nulla a che vedere tra di loro.

Q: Interessante. Ma ancora non ho capito cos'è esattamente il Caos.

A: Ora te lo spiego. Consideriamo la nostra popolazione di conigli. Quest'anno, nel 2013, compriamo 20 conigli e ci facciamo una domanda: quanti conigli ci saranno nel nostro allevamento tra un po' di tempo, diciamo 20 anni? Un modello matematico che descriva l'andamento del numero di conigli nel tempo ci dà la risposta: calcoliamo il numero di conigli nel 2014, e, a partire dal numero che abbiamo ottenuto, nel 2015, e così via fino al 2023. A seconda del fattore di crescita del nostro allevamento, può succedere che dopo un certo numero di anni il sistema si stabilizzi intorno a un numero fisso di conigli, per esempio 34 conigli. Diremo che in questo caso il nostro sistema evolve in un punto fisso (34 conigli). Questo numero, 34 conigli, è quello che chiamiamo "attrattore" del sistema dinamico. Ma può anche accadere che il modello preveda che dopo un certo tempo il numero di conigli oscilli tra due valori, per esempio un anno abbiamo 26 conigli, l'anno successivo 32, quello ancora dopo 26, quello ancora dopo 32, e così via all'infinito. In questo caso diremo che il nostro sistema evolve verso un comportamento periodico; in questo caso diciamo che il periodo è due, perché si ripetono due numeri (26 e 32 conigli). Un altro esempio di comportamento periodico può essere ottenuto ripetendo per esempio la sequenza di numeri 22, 23, 36, 20. Se nel 2020 avremo 22 conigli, nel 2021 ne avremo 23, nel 2022 36, nel 2023 20, nel 2024 di nuovo 22, ecc...In questo caso diciamo che il periodo è quattro, perché si ripete una sequenza fatta di quattro numeri: 22, 23, 36, 20. Tutto dipende dal valore del fattore di crescita.

Q: E un sistema dinamico si comporta sempre in questo modo?

A: Ah...la risposta è no, e qui il discorso si fa interessante! Se i conigli si riproducono ancora di più - è il caso di dire "come conigli" - con un tasso di crescita che superi un certo valore critico (circa $3,57^1$) succede una cosa inaspettata: la popolazione diventa totalmente caotica, cioè varia in maniera imprevedibile da un anno all'altro senza periodicità né alcun altro schema! Dall'ordine siamo passati al caos! Questa "transizione al caos" avviene per duplicazione del periodo: aumentando il tasso di crescita, si passa da un periodo 2, a un periodo 4, a un periodo 8, ecc...In un certo senso fino a un periodo infinito, quando il sistema diventa caotico.

Q: Interessante...Ma perché il Caos è deterministico? Cos'è il Determinismo?

¹ Vedi http://it.wikipedia.org/wiki/Mappa_logistica

A: Beh, un esempio di Determinismo è quello della crescita delle popolazioni, che abbiamo appena discusso. Il numero di individui di una popolazione è determinata in modo univoco dal numero dell'anno precedente. Ma guardiamo a un esempio ancora più semplice. Tu sicuramente possiedi un'automobile. Che cosa succede se ruoti il volante in senso orario?

Q: Questa volta sono io a dover dare una risposta, ma, scusami, mi sembra piuttosto facile in questo caso. Se ruoto il volante in senso orario, l'auto curverà a destra. Semplice, no?

A: Giusto, hai dimostrato di avere un buon grado di fiducia nella tecnica. E questo perché i costruttori di automobili vogliono vendere al loro cliente un oggetto affidabile, il cui comportamento sia esattamente quello che ci aspettiamo. Credo che non saresti soddisfatta se, girando il volante, la tua auto avesse una probabilità dell'ottanta per cento di girare a destra, un dieci per cento di girare a sinistra e un dieci per cento di proseguire dritta. Possiamo dire che il volante della nostra automobile è un sistema deterministico lineare, almeno in condizioni non critiche. Con il termine lineare intendo che girando il volante di – diciamo – dieci gradi la tua auto sterzerà il doppio di quello che sarebbe accaduto se avessi ruotato il volante di 5 gradi. In altri termini la sterzata dell'auto è proporzionale alla rotazione del volante. I fisici e i matematici chiamano lineare un comportamento di questo tipo.

Q: L'esempio è chiarissimo, ma l'automobile è una cosa creata dall'uomo. Mi sapresti fare un esempio di fenomeno naturale deterministico?

A: Certo, ti faccio quello che può essere chiamato il padre di tutti gli esempi: la caduta dei gravi, cioè dei corpi soggetti alla forza di gravità. Tu sai che sulla Terra, e anche sulla Luna o su un altro pianeta, ogni corpo precipita verso il basso.

Q: Certo, fin qui ci arrivo.

A: Fu Galileo Galilei che comprese per primo la legge esatta che governa la caduta dei gravi, dando inizio alla Fisica moderna. La legge Fisica è la seguente: in assenza di attrito tutti i corpi cadono con un'accelerazione costante (l'accelerazione di gravità) che non dipende né dalla massa né dal materiale del corpo. Dipende solo dal pianeta in cui ci troviamo. Sulla Luna, per esempio, i corpi cadono più lentamente che sulla Terra.

Q: E perché questo è un esempio di Determinismo?

A: Vedi, se lascio cadere una sferetta di metallo da – diciamo - 50 centimetri di altezza, la legge della caduta dei gravi ci permette di calcolare con precisione dopo quanto tempo la sferetta toccherà il suolo. Questo è un buon esempio di sistema deterministico non caotico. Se misuriamo con precisione lo stato iniziale del sistema (la posizione e la velocità della sferetta all'istante iniziale) possiamo calcolare con precisione l'istante in cui toccherà il pavimento. Bel concetto, no? Il nostro sistema fisico è, in questo caso, sia deterministico che predicibile, nel senso che se conosciamo il suo stato iniziale possiamo predire con precisione il suo stato finale. L'istante in cui toccherà il pavimento, ma anche la posizione precisa della sferetta a un tempo arbitrario.

Q: Interessante, il moto della sferetta è determinato in modo esatto. Questo mi suggerisce che ogni parte dell'Universo - gli atomi, le stelle, le galassie, ecc... - seguirà una traiettoria precisa. Giusto? Questo mi fa pensare a una frase che ho letto in un libro di filosofia.

A: Beh, ogni parte dell'Universo...non esattamente. Dopo Galileo la Fisica moderna ha scoperto molte altre cose. Quello di cui parliamo qui ha a che vedere con quella che chiamiamo Meccanica Classica. La Meccanica Classica è una teoria indispensabile in molti campi, per esempio nello studio del moto dei pianeti, dei satelliti artificiali, delle sonde spaziali, ma non può essere applicata al mondo atomico e subatomico. Ma è sempre interessante quello che c'è scritto nei libri di filosofia. Sentiamo...

Q: È una frase che mi ha talmente colpito che me la sono scritta sul mio quaderno. Vediamo...ecco qua, in un saggio sulla probabilità, nel 1814 Laplace scriveva:

"Lo stato attuale dell'Universo è l'effetto di quello anteriore e la causa di quello futuro. Un'Intelligenza che conoscesse tutte le forze della natura e la situazione degli esseri che la compongono, ed analizzasse profondamente tali dati, potrebbe esprimere in un'unica formula i movimenti dei grandi astri come quelli dei più piccoli atomi. Tutto gli sarebbe chiaro e il passato come il futuro presenti ai suoi occhi."

A: Hai fatto bene a conservare questa frase. Essa sintetizza in maniera perfetta il concetto di Determinismo. Tornando al nostro semplice esperimento, così come possiamo prevedere esattamente l'istante in cui la sferetta di metallo toccherà il suolo potremmo, almeno in linea di principio, prevedere il moto di tutte le particelle che compongono il nostro Universo. In fondo di cosa è fatto l'Universo se non da un numero enorme di stelle, pianeti, particelle, le cui leggi del moto non sono molto diverse da quella della nostra sferetta di metallo. In questa visione dell'Universo il passato e il futuro sono completamente determinati dal suo stato ad un dato istante. Devo ammettere che è una visione della realtà un po' inquietante. Se ci pensiamo bene, in un Universo di questo tipo conta solo il presente, l'idea stessa dello scorrere del tempo dal passato al futuro viene messa in discussione. Aggiungo che, poiché anche il cervello è fatto di atomi, persino la nostra stessa libertà di agire sarebbe un'illusione. In questi giorni ho visto il trailer di un film, "Cloud Atlas"... sullo schermo scorreva enfatica la frase: PASSATO PRESENTE FUTURO... TUTTO È CONNESSO. Ecco, questo tipo di riflessione non è nuova, l'aveva già fatta Laplace due secoli fa!

Q: Interessante...Ma, ora che ho capito il significato di Caos e di Determinismo, l'argomento di oggi mi sembra ancora più strano: come fa il Caos a essere deterministico, cioè prevedibile? È un controsenso, no?

A: Beh, quello che abbiamo detto fino ad ora sul Determinismo non è la fine della storia... In una conferenza tenutasi nel 1972 Lorenz, uno dei padri della Teoria del Caos, si chiedeva se il battito delle ali di una farfalla in Brasile può provocare un tornado in Texas.

Q: Ho capito, ma non posso credere che una semplice farfalla...

A: Beh, come ti dicevo il battito d'ali di una farfalla è soltanto una metafora utile per capire di cosa si tratta. Quello che sappiamo è che nella nostra atmosfera anche un piccolissimo cambiamento di stato – possiamo immaginarcelo, in modo poetico, dovuto allo spostamento d'aria provocato dalle ali di una farfalla - può crescere esponenzialmente nel tempo provocando effetti enormi come un tornado. Il risultato è un comportamento caotico. In altre parole, anche per l'atmosfera avviene lo stesso fenomeno che abbiamo visto con l'allevamento di conigli, dove, se il tasso di crescita raggiunge un valore critico, il sistema passa da un comportamento prevedibile a un comportamento caotico! Siccome tutto accade a partire da leggi - quelle che governano crescita della popolazione di conigli o la dinamica di un fluido come la nostra atmosfera - che sono deterministiche, parliamo di Caos Deterministico. E il clima non è il solo sistema fisico che si comporta in questo modo. Anche in Biologia l'evoluzione di popolazioni, o in Economia il mercato azionario, seguono le leggi del Caos Deterministico. Per tutti questi sistemi si dovrebbe parlare di "sensibilità alle condizioni iniziali", ma "effetto farfalla" è più divertente.

Q: Puoi farmi un esempio pratico di "sensibilità alle condizioni iniziali"?

A: Certo. Se hai una matita o una penna con te, prova a tenerla verticale sulla scrivania e a lasciarla. Questa cadrà in un punto oppure in un altro a seconda se è leggermente inclinata in una direzione piuttosto che in un'altra. Di fatto, se la matita parte da una posizione verticale non sapremo dove cadrà. Passando a un sistema notevolmente più complesso come la vita di tutti i giorni capita spesso che una piccola scelta condizioni l'intero corso della nostra storia. Magari un giorno andiamo al bar per un caffè e incontriamo la donna (o l'uomo) della nostra vita... e la nostra vita non sarà più la stessa dopo quel piccolo episodio. Nel film Ritorno al Futuro il giovane protagonista, quando si trovava a vivere nel passato, doveva far sì che assolutamente i suoi genitori si incontrassero, altrimenti nel presente (il futuro rispetto al passato che in cui si trovava) non sarebbe esistito.

Q: E la sferetta di metallo in caduta libera di cui parlavamo prima?

A: In questo caso posso prevedere l'istante in cui toccherà il pavimento con una precisione che dipende in maniera semplice dalla precisione con cui conosco l'altezza da cui cade. In pratica se in un primo esperimento lascio cadere la sferetta da 50 centimetri e in un secondo esperimento la lascio cadere da 51 centimetri il tempo che impiegherà per toccare il suolo cambierà di poco. Quando diciamo che non c'è una forte dipendenza dalle condizioni iniziali intendiamo esattamente questo. Questi sistemi sono deterministici e non caotici. Deterministici perché il loro stato è regolato da leggi esatte e non caotici perché dalla misura dello stato iniziale possiamo predire lo stato futuro con precisione.

Q: Ma - se ho capito bene - non tutti i sistemi deterministici si comportano in questo modo. Giusto?

A: Certo, è proprio così. I sistemi che chiamiamo caotici sono deterministici, ma non predicibili. Ma questo – fai attenzione – non significa che non hanno delle caratteristiche che possono essere studiate: ricorda che caotico non vuol dire casuale! Considera il

fumo di una sigaretta. Questo fumo non riempie lo spazio in modo uniforme, ma forma una struttura a vortici peculiare, che siamo in grado di riconoscere. In fondo, poco importa se non siamo in grado di prevedere la posizione a un dato istante di ogni particella, quello che ci interessa conoscere è la struttura del fumo di una sigaretta. La teoria che si occupa di cose come il fumo di una sigaretta, o la forma delle nuvole, si chiama Teoria del Caos.

Q: Ma il fumo di una sigaretta o la forma delle nuvole sono argomenti oziosi di cui si occupano gli artisti. Quali sono le applicazioni utili di questa teoria?

A: Ce ne sono tante. Vanno dalla scienza del clima, alla biologia, all'economia, alla finanza, e persino all'Astrofisica. Ti sembrerà strano, ma in tutti questi sistemi caotici le strutture che si formano hanno delle proprietà in comune. Cosicché studiare la forma delle nuvole o del fumo di una sigaretta può farci comprendere fenomeni apparentemente molto diversi tra loro, come il moto dei pianeti e delle stelle, l'andamento dei mercati finanziari, o le condizioni che portano all'insorgere di un'aritmia cardiaca. Come vedi, il Caos è un po' ovunque, diciamo che costituisce più la regola che l'eccezione.

FINE