

Consideriamo la reazione $p + p \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu_e$.

Il numero di reazioni per unità di tempo e di volume che avvengono in una stella è dato da:

$$\frac{N^\circ \text{reaz.}}{t \cdot V} = n_p \cdot n_p \cdot v \cdot \sigma$$

dove n_p è la densità di protoni nel nucleo del sole, v è la velocità relativa con cui i nuclei si muovono e σ è un parametro detto **sezione d'urto**.

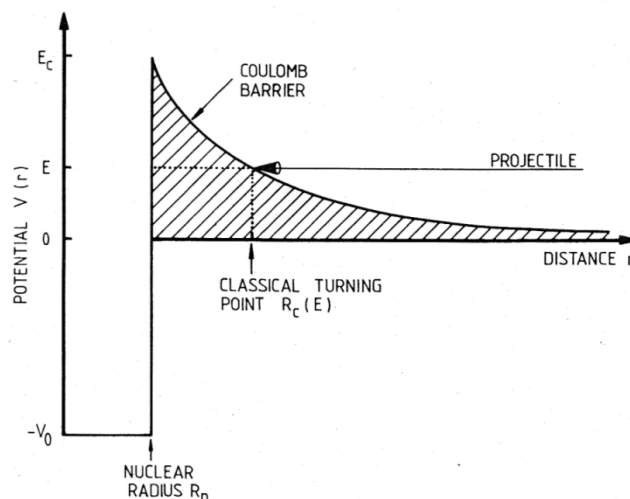
Il termine $n_p \cdot n_p \cdot v$ rappresenta la frequenza con cui due protoni possono incontrarsi nella stella. La sezione d'urto, invece, rappresenta la probabilità che, una volta che i due nuclei vengono in contatto, avvenga effettivamente la reazione di fusione.

Esaminiamo i termini che compaiono nell'equazione:

- La densità del nucleo del sole è pari a 150 g/cm^3 . La materia solare è composta, in prima approssimazione, dal 75% di protoni e dal 25% di elio. Questo significa che la densità di protoni nel nucleo del sole è di circa 112.5 g/cm^3 , ovvero $n_p = 6.7 \cdot 10^{25} \text{ atomi/cm}^3$.
- La velocità delle particelle all'interno di una stella (o la loro energia cinetica $E = mv^2/2$) segue una distribuzione detta di Maxwell-Boltzmann, in maniera analoga ad un qualsiasi gas in equilibrio termodinamico
- La sezione d'urto è un parametro espresso in unità di superficie. Immaginando i due protoni come due biglie, la probabilità che lanciando le due biglie l'una verso l'altra queste si scontrino è tanto più alta quanto più grandi sono le biglie. Analogamente, la sezione d'urto si può pensare come un'area efficace che è tanto più grande quanto maggiore è la probabilità di interazione

La sezione d'urto per una reazione di fusione nucleare dipende da vari fattori. Tra questi vi è la probabilità di superamento della barriera Coulombiana: affinché due nuclei (che sono oggetti carichi positivamente) possano fondersi è necessario che essi superino la barriera di repulsione Coulombiana, che tende invece ad allontanarli.

La temperatura al centro del Sole è di circa 15 milioni di gradi, che corrisponde ad una energia cinetica media delle particelle $E = kT \sim 1 \text{ keV}$. Il potenziale Coulombiano repulsivo tra due protoni è pari a 550 keV (500 volte più grande!). Questo significa che, secondo la Fisica classica, due protoni nel Sole non potrebbero mai superare la barriera di repulsione Coulombiana. Per fortuna ci viene in soccorso l'effetto tunnel quantistico, che consente comunque ai due protoni di superare la barriera Coulombiana, ma con una probabilità che diminuisce esponenzialmente al diminuire dell'energia cinetica delle due particelle.

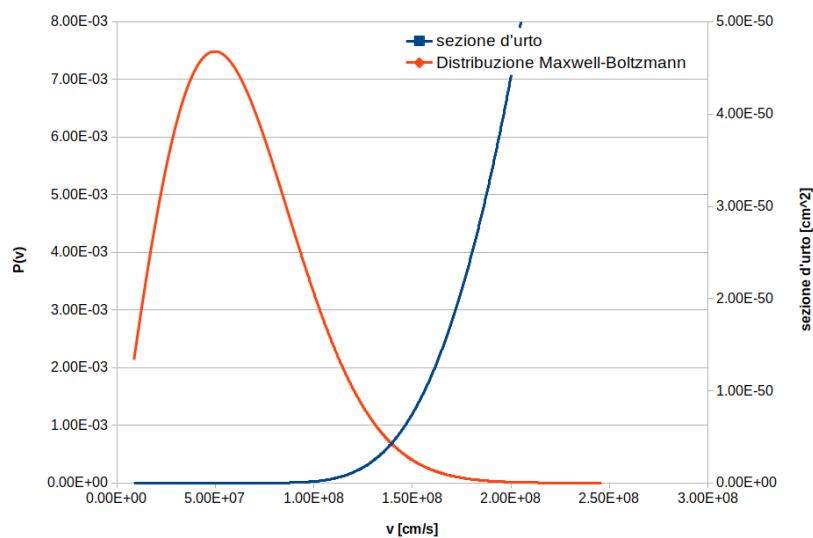


Per due protoni di energia nel centro di massa pari a 1 keV, la probabilità di superamento della barriera Coulombiana è pari a $9 \cdot 10^{-10}$. Questo significa che solo uno scontro su un miliardo può effettivamente dare vita ad una reazione di fusione!

La probabilità di penetrazione della barriera Coulombiana non è l'unico fattore che influenza la sezione d'urto: la reazione di fusione $p + p \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu_e$ prevede che, oltre alla fusione di due protoni, avvenga anche la conversione di un protone in un neutrone (il deuterio è formato da un protone e un neutrone). Questo processo avviene per interazione debole ed ha di per sé una probabilità molto bassa.

La figura di seguito mostra gli andamenti della distribuzione di Maxwell-Boltzmann per $T = 15 \cdot 10^6$ K e della sezione d'urto in funzione della velocità nel centro di massa delle particelle interagenti.

La sezione d'urto per la reazione $p + p \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu_e$ in corrispondenza del massimo della distribuzione di Maxwell-boltzmann è dell'ordine di $9 \cdot 10^{-56}$ cm².



Per svolgere un conto approssimato, proviamo ad utilizzare la velocità media della distribuzione di Maxwell-Boltzmann:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = 8 \cdot 10^7 \text{ cm/s}$$

$$\sigma(\bar{v}) = 7.2 \cdot 10^{-54} \text{ cm}^2$$

$$\frac{N^\circ \text{ reaz.}}{t \cdot V} = n_p \cdot n_p \cdot v \cdot \sigma = 6.7 \cdot 10^{25} \frac{\text{protoni}}{\text{cm}^3} \cdot 6.7 \cdot 10^{25} \frac{\text{protoni}}{\text{cm}^3} \cdot 8 \cdot 10^7 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot 7.2 \cdot 10^{-54} \text{ cm}^2 = 2.6 \cdot 10^6 \frac{\text{reazioni}}{\text{s} \cdot \text{cm}^3}$$

Moltiplicando per il volume del nucleo del Sole ($\sim 1.7 \cdot 10^{10}$ cm³) si ha che, all'interno del Sole, avvengono circa $6 \cdot 10^{37}$ reazioni $p+p \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu_e$ al secondo!