SxT-Scaffali
2006

Calcolo vettoriale e scomposizione della forza-peso di un corpo.

Annarita Lorenzo

Agosto 2006

ScienzaPerTutti
SxT- Scaffali
10 - 2006

La semplice dimostrazione proposta utilizza le proprietà del calcolo vettoriale e la scomposizione della forza-peso di un corpo.
Il concetto di forza come vettore, la sua rappresentazione grafica e la sua applicazione al problema dell'equilibrio di un corpo su un piano inclinato vennero proposti per la prima volta nel 1687, quasi contemporaneamente e probabilmente indipendentemente, da Newton e Varignon. in realtà una spiegazione dell'equilibrio di un corpo su un piano obliquo fu oggetto di studio da parte di Stivino intorno al 1585 e, precedentemente, di S. Cardano che non giunse ad alcuna soluzione

Per dare una dimostrazione semplice del principio di conservazione dell'energia del moto su un piano inclinato e' necessario porre delle ipotesi di partenza.

Supponiamo:

a) che il piano sia perfettamente levigato in modo da trascurare in prima analisi la forza d'attrito;
b) che il corpo abbia la forma di un parallelepipedo rettangolo (fig.1)

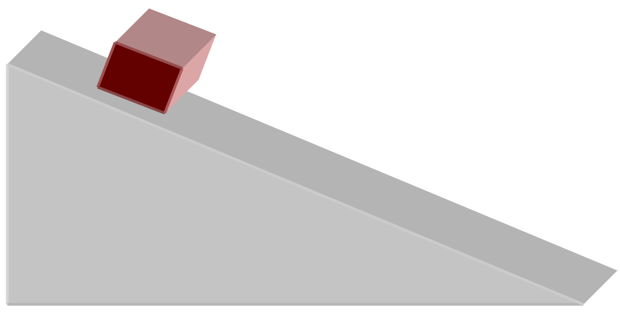

Fig. 1

Situazione schematica bidimensionale (fig. 2)

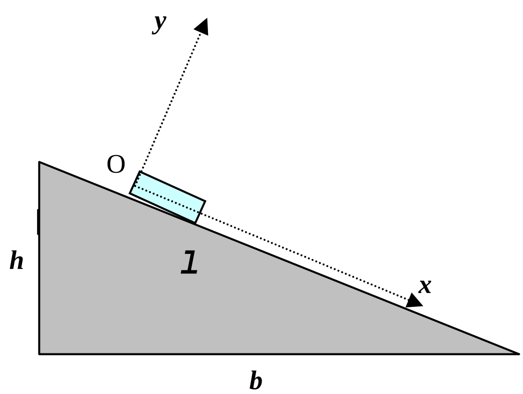

Fig.2

Sia O la posizione iniziale del corpo cui corrisponde l'origine del sistema di riferimento, avente asse x parallelo al piano inclinato e diretto verso il basso e l'asse y perpendicolare al piano inclinato e diretto verso l'alto.

Sul corpo, cosi' come indicato in **fig. 3**, agiscono solo la forza-peso e la forza di reazione del vincolo applicata nel centro di massa del parallelepipedo

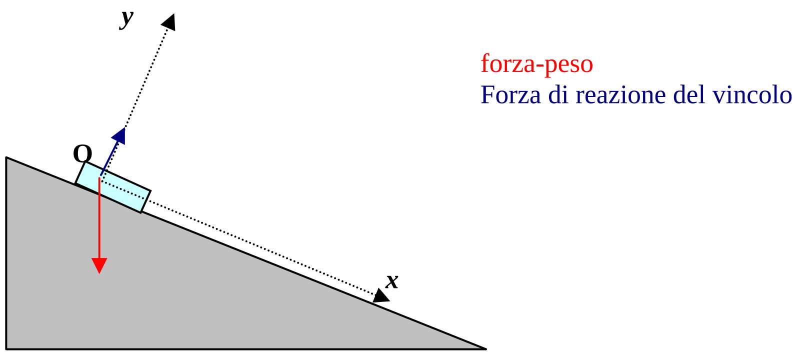

Fig.3

$\vec{P} = P_x\,\hat{x} + P_y\,\hat{y}$ (fig. 4) dove con P_x e P_y si indica la componente della forza-peso, rispettivamente, nella direzione del piano inclinato e nella direzione dell'asse y

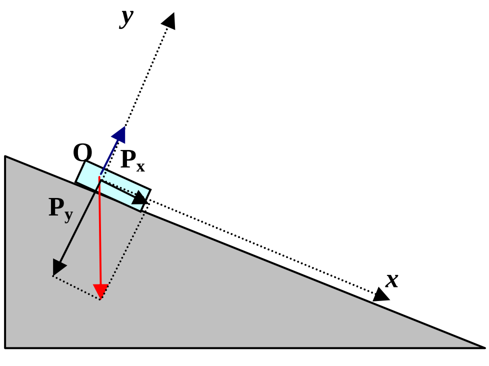

Fig. 4

Per determinare una relazione tra P_x, P_y e P possiamo considerare i due triangoli ABC e OHK che sono simili per il terzo principio di similitudine dei triangoli, perche' entrambe rettangoli ed aventi

l'angolo ABC = l'angolo KOH

perche' *angoli corrispondenti* tra le due direzioni parallele : AB (altezza del piano inclinato) e OH (direzione della forza-peso) e tagliate dalla trasversale AC (fig. 6)

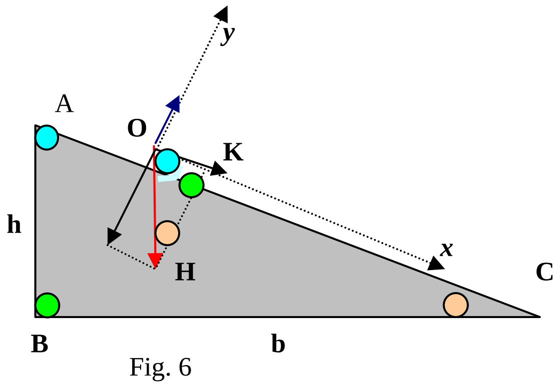

Fig. 6

relazione di corrispondenza tra lati

ABC	OHK
AC	OH
BC	HK
AB	OK

Applicando il principio di proporzionalità tra lati, si ottiene che:

$AC/AB = P/PK \longrightarrow AC/AB = P/P_x \longrightarrow l/h = P/P_x$

Nello stesso modo $AC/BC = P/HK \longrightarrow AC/BC = P/P_y$;

quindi indicando con l la lunghezza del piano inclinato si ha:

$$P_x = \frac{h}{l} P \quad \text{e} \quad P_y = \frac{b}{l} P$$

La componente P_y , essendo perpendicolare al piano inclinato e diretta verso la direzione negativa dell'asse y, non produce effetti di moto, ma potrebbe eventualmente deformare il piano obliquo, se questo non fosse perfettamente rigido.

Il moto di scivolamento lungo il piano avviene per effetto della componente P_x della forza-peso, per esso vale la legge del moto uniformemente accelerato:

$$F = ma \Rightarrow P_x = ma \Rightarrow \frac{h}{l} mg = ma \longrightarrow \boxed{a = \frac{h}{l} g} \quad (1)$$

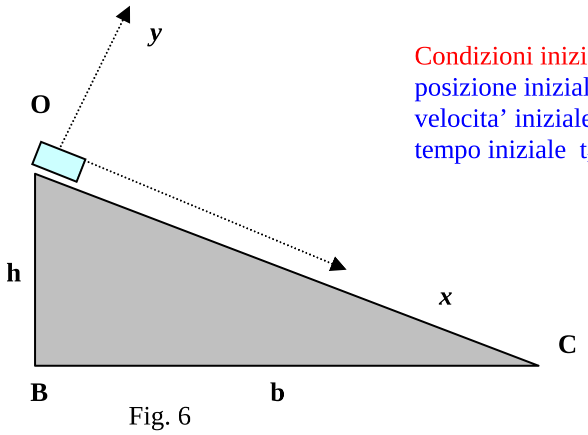

Fig. 6

Condizioni iniziali del moto:
posizione iniziale $s_i = 0$
velocita' iniziale $v_i = 0$
tempo iniziale $t_i = 0$

Mentre alla base del piano obliquo nel punto C il corpo possiede una velocita'

$$\boxed{v = \sqrt{2la}} \quad (2)$$

(2)

$$l = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2l}{a}};$$

quindi

$$v = v_{iniziale} + at \Rightarrow v = a\sqrt{\frac{2l}{a}} \Rightarrow v = \sqrt{2la}$$

Per il principio di conservazione dell'energia si ha:

Energia cinetica iniziale + Energia potenziale iniziale =
Energia cinetica finale +Energia potenziale finale

e sostituendo i rispettivi valori

$$0 + mgh = \frac{1}{2} mv^2 + 0 \longrightarrow mgh = \frac{1}{2} m\, 2la \longrightarrow$$

$$gh = l\frac{h}{l} g$$

cioe' : $g\,h = g\,h$

Nelle situazioni fisiche più generali la forza d'attrito non può essere trascurata e pertanto il moto avviene per effetto della risultante delle due forze dirette lungo l'asse delle ascisse, una e' la componente della forza-peso lungo l'asse delle x e l'altra e' la forza d'attrito che ha verso opposto a quello del moto e pertanto e' diretta nella direzione negativa dell'asse delle ascisse. In tal caso il principio di conservazione si generaliza cosi':

(3)

Energia cinetica iniziale + Energia potenziale iniziale =
Energia cinetica finale + Energia potenziale finale + Lavoro forza d'attrito

La (1) in tal caso sarà:

$$P_x - \mu P_y = ma \longrightarrow \frac{h}{l}P - \mu\frac{b}{l}P = ma \longrightarrow \boxed{a = \frac{P}{ml}(h - \mu b)}$$

dove μ e' il coefficiente d'attrito del piano
e analogamente a quanto ottenuto in (2)

$$v = \sqrt{2la} \longrightarrow \boxed{v = \sqrt{2l\frac{P}{ml}(h - \mu b)}}$$

Lavoro $_{\text{forza d'attrito}}$ **= Fa l =** $-\ \mu P_y \quad = \quad -\ \mu \dfrac{b}{l} Pl \ = -\mu bP$

Sostituendo i rispettivi valori nella (3) si ottiene:

$$mgh = \frac{1}{2} m\, 2l \frac{P}{ml}(h - \mu b) + \mu bP \longrightarrow$$

$$mgh = \frac{1}{2} m\, 2l \frac{mg}{ml}(h - \mu b) + \mu bP \longrightarrow$$

e procedendo con le semplificazioni e le operazioni

$$mgh = mgh$$