

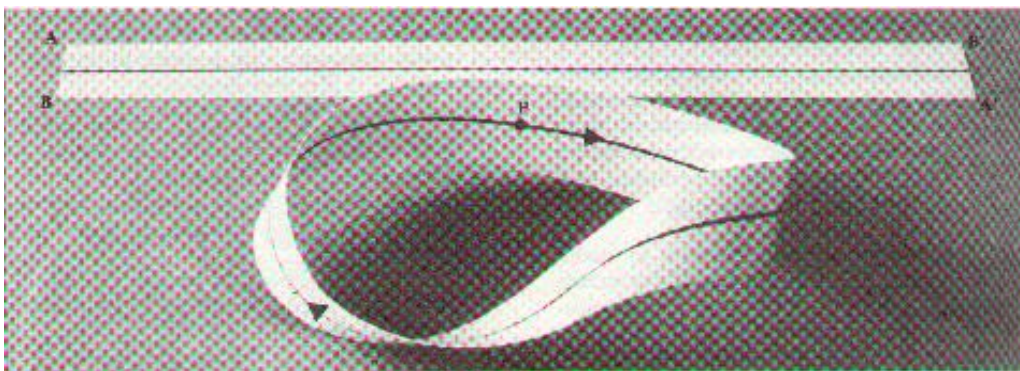
# Oggetti matematici curiosi: le varietà non orientabili

*Luca Lussardi*

Quando si pensa ad un oggetto matematico, solitamente non si pensa a qualcosa di concreto, ovvero a qualcosa che si possa toccare. Questo è vero per la maggior parte degli enti di cui si occupa la Matematica; ma esistono alcune figure geometriche molto particolari, ed interessanti per le loro proprietà, che possono essere facilmente (o quasi) costruite a mano. In questo modo è diretta la verifica delle anomale proprietà che queste figure possiedono. Una classe di questo tipo è costituita dalle cosiddette **varietà non orientabili**. Anzitutto occorre chiarire il significato del termine **varietà**; in Geometria si studiano curve (oggetti di dimensione 1, hanno solo la lunghezza, ad esempio una circonferenza), superfici (oggetti di dimensione 2, ad esempio una superficie sferica), parti di volume (oggetti di dimensione 3, ad esempio la sfera intera).

In generale, sebbene l'intuizione visiva venga meno, è possibile considerare superfici di dimensione  $n$ , che vengono dette **varietà  $n$ -dimensionali**. Dunque una varietà di dimensione 1 è una curva (non necessariamente piana), una varietà di dimensione 2 è un' intuitiva superficie, e così via. Ora pensiamo un attimo alla superficie laterale di un cilindro: la possiamo ottenere facilmente ritagliando da un foglio di carta una striscia rettangolare con un lato ben più corto dell'altro, e incollando i due lati uguali più corti del rettangolo. Ebbene, tale superficie è abbastanza ordinaria: infatti, come uno potrebbe ingenuamente pensare, tutte le superfici debbono avere 2 facce: un sopra ed un sotto.

Ed il nostro esempio calza alla perfezione: se immaginiamo di camminare sul lato esterno della superficie cilindrica, non riusciremo mai ad arrivare dall'altra parte senza attraversare il bordo. Provare per credere: basta colorare la superficie cilindrica partendo da una delle 2 facce: se uno non attraversa il bordo, finisce con il colorare solo una delle 2 facce. Superfici di questo tipo si chiamano **orientabili**: ovvero hanno un sopra ed un sotto. Ma ci sono superfici che non hanno 2 facce? Ebbene sì: ci sono superfici che hanno una sola faccia. Uno può passare da una faccia all'altra (termine improprio, visto che abbiamo appena detto che la faccia è solo una) senza dover attraversare il bordo, o bucare la superficie. E' molto semplice costruire una superficie di questo tipo: basta prendere la stessa striscia rettangolare di carta usata per costruire la superficie cilindrica: ora però prima di incollare i due lati più corti del rettangolo, facciamo fare mezzo giro ad un lato. Infine incolliamo i due lati, di cui uno è stato ribaltato dal mezzo giro. La figura qui di sotto aiuta a capire come si procede, e mostra cosa si ottiene.

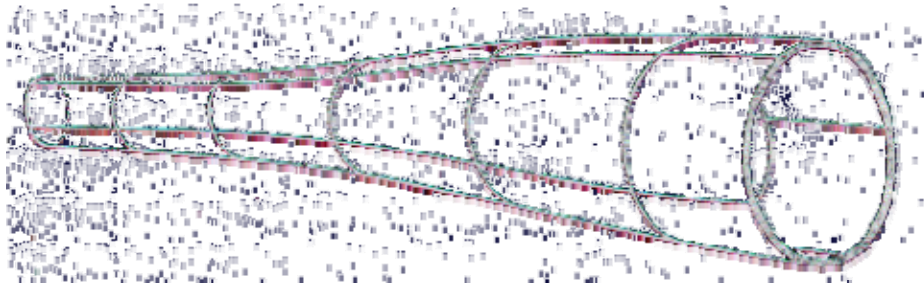


La superficie che abbiamo in mano è un **Nastro di Mobius**. Questa è una superficie **non orientabile**. Infatti, se proviamo a colorare il nastro partendo da un suo punto, quello che capita è che uno finisce con il colorare tutto il nastro senza attraversare il bordo. Provare per credere. Dunque il

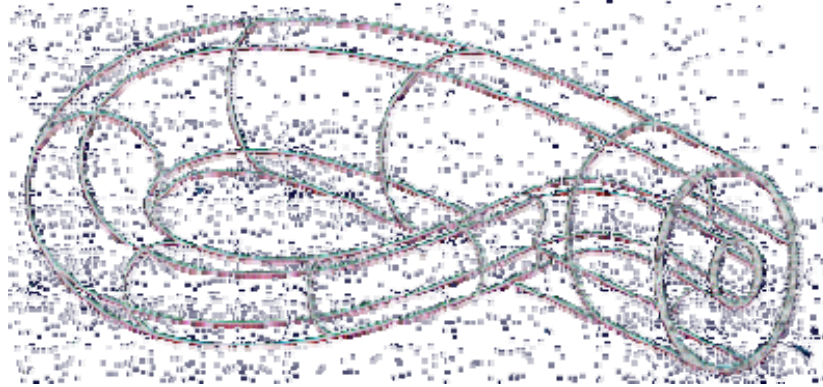
nastro di Mobius ha una sola faccia.

Se uno immagina di camminare su un Nastro di Mobius, dopo un certo tempo si ritrova esattamente al di sotto di dove era partito, senza aver dovuto per questo attraversare il bordo, o fare un buco lungo il percorso. Il Nastro di Mobius ha altre particolari proprietà, che possono essere verificate direttamente. Se tagliamo il nastro lungo la linea mediana (quella segnata in nero nella figura di sopra) otteniamo un nastro di Mobius più lungo. Ora costruiamo un altro Nastro di Mobius e proviamo a disegnare 2 linee parallele alla mediana, ma che dividono in 3 parti il nastro stesso; tagliamo lungo tali linee (ci accorgeremo che si passerà da una linea all'altra senza staccare la forbice dal nastro: un'altra prova della non orientabilità...): ebbene otteniamo 2 nastri di Mobius incatenati.

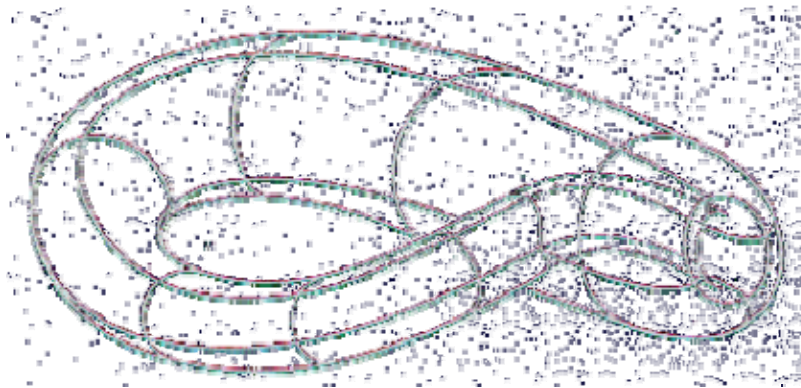
Il Nastro di Mobius ha però una cosa in comune con la superficie cilindrica considerata prima: entrambi hanno un bordo; osservando direttamente le superfici costruite, non è difficile convincersi che il bordo della superficie cilindrica è costituito da 2 circonferenze parallele tra loro, non giacenti sullo stesso piano, ma su piani paralleli. (Il bordo di una superficie di dimensione 2 e' sempre un oggetto di dimensione minore di 2, ovvero 1 o 0). Per il Nastro di Mobius invece, il bordo, se uno prova a seguirlo, è costituito da una sola linea chiusa, quello che in Matematica si chiama curva di Jordan. Esistono superfici, ad esempio la superficie di una sfera, che non hanno bordo, ovvero le cosiddette **superfici chiuse**. Qui, relativamente alle superfici chiuse, la situazione ordinaria è ancora più evidente. Se pensiamo alla superficie sferica ed immaginiamo di camminarci sopra (cosa non difficile da immaginare, visto che, approssimativamente, è quello che ci capita abitualmente), allora è ovvio che non possiamo entrare nel suo interno senza attraversarla. Ovvero la superficie ha ancora 2 facce ben precise e distinte, solo che ora non si parla più di sopra o sotto, ma di dentro o fuori. Una superficie chiusa (cioè senza bordo) che ha un dentro ed un fuori si dice orientabile. La cosa interessante è che esistono superfici chiuse, ma che non hanno un dentro ed un fuori. La proprietà di queste superfici, detta ancora di non orientabilità, si può interpretare come segue: se noi pigliamo una superficie chiusa orientabile e supponiamo che vi sia contenuto del liquido, è abbastanza scontato che tale liquido non potrà uscire dalla superficie, comunque essa venga rigirata. Se invece prendiamo una superficie chiusa non orientabile, e ipotizziamo di riempirla di liquido al suo interno (ma che cos'è l'interno di una superficie chiusa non orientabile?), questo riuscirà sempre all'esterno. La costruzione di una superficie chiusa non orientabile non è semplice come la costruzione del Nastro di Mobius, ma si può fare; le seguenti figure illustrano il procedimento. Si parte da una superficie quasi cilindrica, una specie di superficie laterale di una bottiglia.



Quindi si richiude un estremo della bottiglia verso l'altro, attraversando la bottiglia stessa, come si vede dalla seguente immagine.

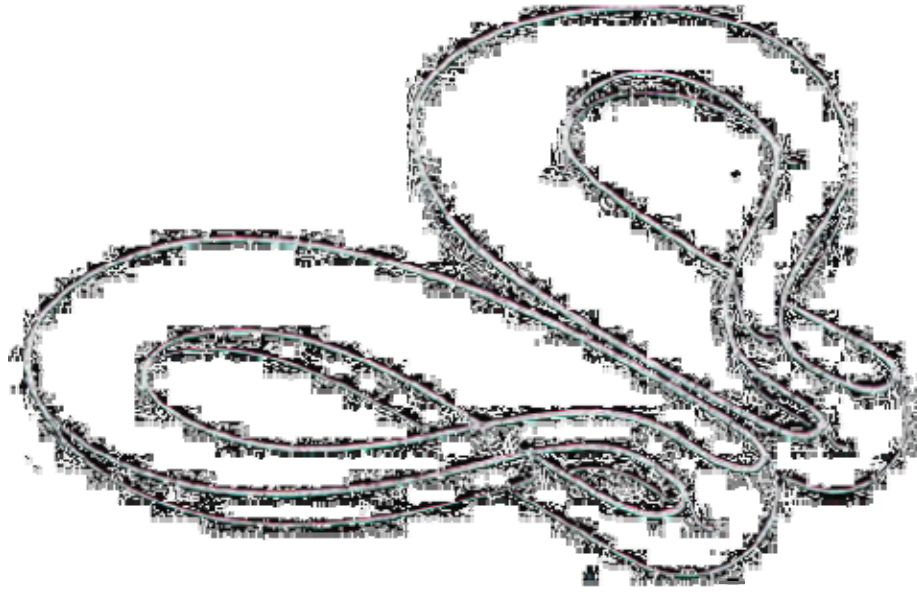


Infine, basta prolungare la circonferenza che è bordo dell'estremo della bottiglia più piccolo verso la circonferenza più grande, bordo dell'altro estremo della bottiglia; in tal modo la superficie diviene chiusa. La seguente figura mostra il risultato finale ottenuto.



Questo è un modello tridimensionale della **Bottiglia di Klein**. In realtà la Bottiglia di Klein è una superficie che vive in uno spazio a 4 dimensioni.

Sostanzialmente, per cercare di vederla, si è costretti a ripiegarla opportunamente, e ad effettuare quell'auto-intersezione come appare in figura, cosa che se avessimo una dimensione in più, non saremmo costretti a fare. La bottiglia di Klein non ha un dentro ed un fuori: infatti se immaginiamo di camminare sulla bottiglia, riusciamo ad entrare al suo interno senza bucarla ed a riuscirne al punto di partenza. Ciò nonostante, è una superficie chiusa. Se la riempiamo con un liquido e la rigiriamo, il liquido fuoriesce, cosa inconcepibile per un'ordinaria (o come ormai abbiamo imparato: orientabile) superficie chiusa, come quella sferica. Sebbene questo oggetto sia più complicato del precedente Nastro di Mobius, in realtà si riconduce ad esso. Se immaginiamo di tagliare lungo una mediana una bottiglia di Klein, si ottengono due Nastri di Mobius.



Questa proprietà è del tutto generale: si dimostra infatti che **ogni** superficie, chiusa o non chiusa, non orientabile contiene almeno un Nastro di Mobius. Così, come i numeri primi sono i mattoni con cui si costruiscono tutti i numeri naturali (ogni numero naturale si scompone in fattori primi), allo stesso modo il Nastro di Mobius è il mattone fondamentale con cui si costruiscono tutte le superfici, o meglio, tutte le varietà non orientabili di qualunque dimensione.