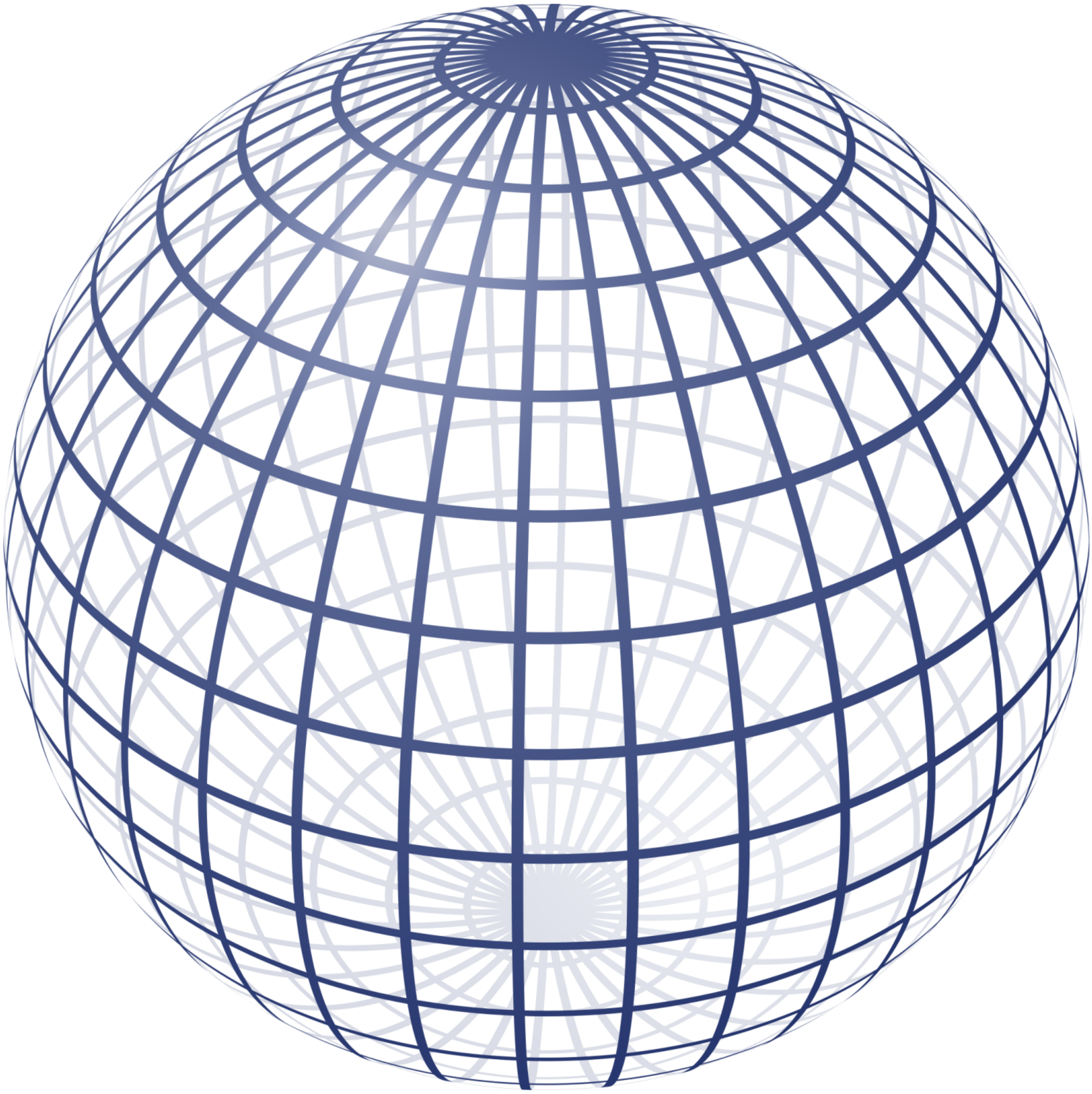
I SOLIDI IGNOTI

Tiziano Virgili



Gennaio 2021

In quarta di copertina: M. Escher, stelle

I SOLIDI IGNOTI

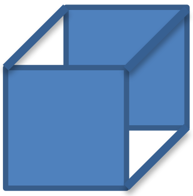
Piccola guida alla costruzione materiale di solidi elementari e non.

di Tiziano Virgili

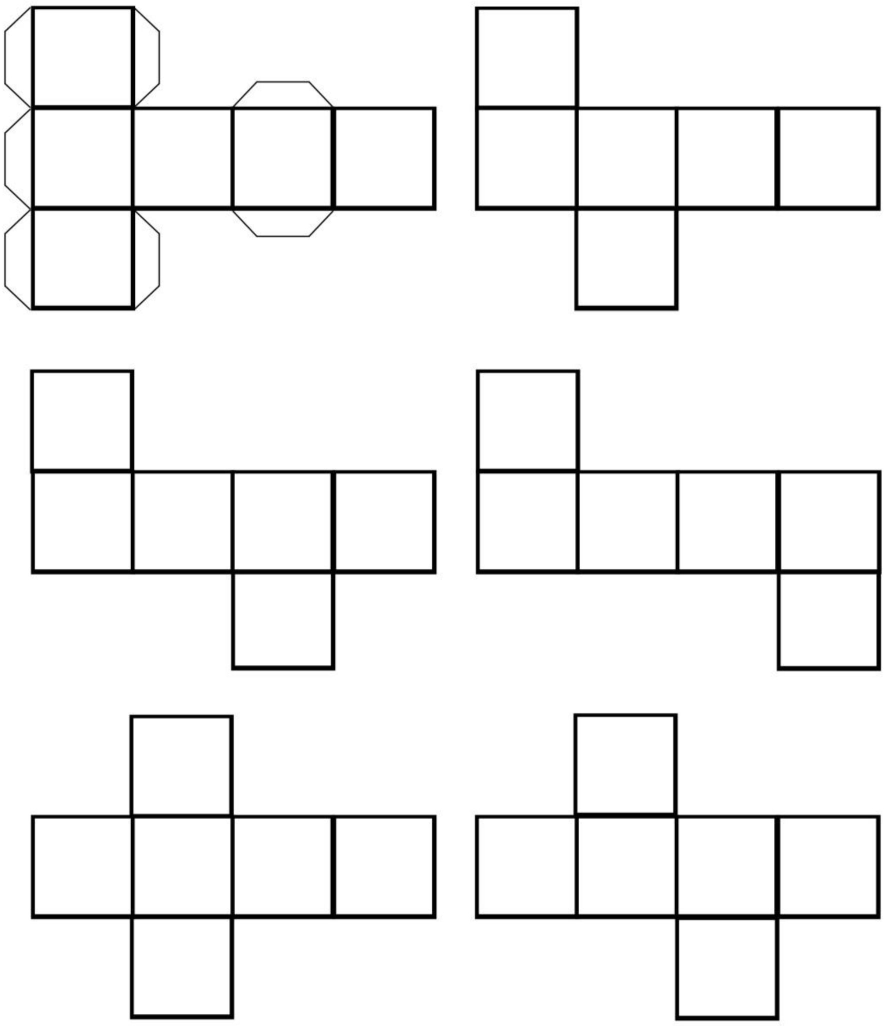
Siamo abituati fin dall'infanzia a riconoscere e ad analizzare forme geometriche elementari. Nel caso dei solidi tuttavia lo studio tradizionale in genere si limita a formule e teoremi teorici, raramente si è impegnati alla loro costruzione materiale. D'altra parte la maggior parte degli oggetti realizzati dall'uomo possiede proprio la forma di solidi elementari, o è riconducibile ad una loro combinazione. Non è dunque del tutto inutile provare ad analizzare quelli che sono gli sviluppi su piano di figure tridimensionali, partendo dalle più semplici come cubi e parallelepipedi. Anche in questi casi, è forse possibile scoprire qualche proprietà inattesa. Vedremo poi come grazie alle capacità del computer è possibile oggi rendere sviluppabili anche forme estremamente complesse come figure umane o cattedrali. Oltre alle diverse proposte concrete di sviluppo di solidi semplici (da ritagliare e montare, per chi ha pazienza), vedremo alcune caratteristiche insolite sotto forma di "problemi".

Nota: nel seguito, per possibili modi di sviluppo si intenderanno tutte le forme sul piano "connesse", ovvero per le quali ogni elemento (faccia del solido) è connesso con almeno un altro attraverso un lato in comune.

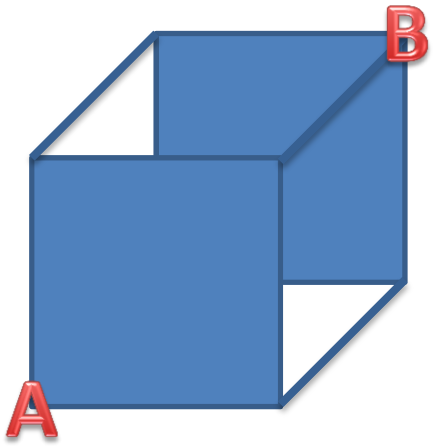
CUBO



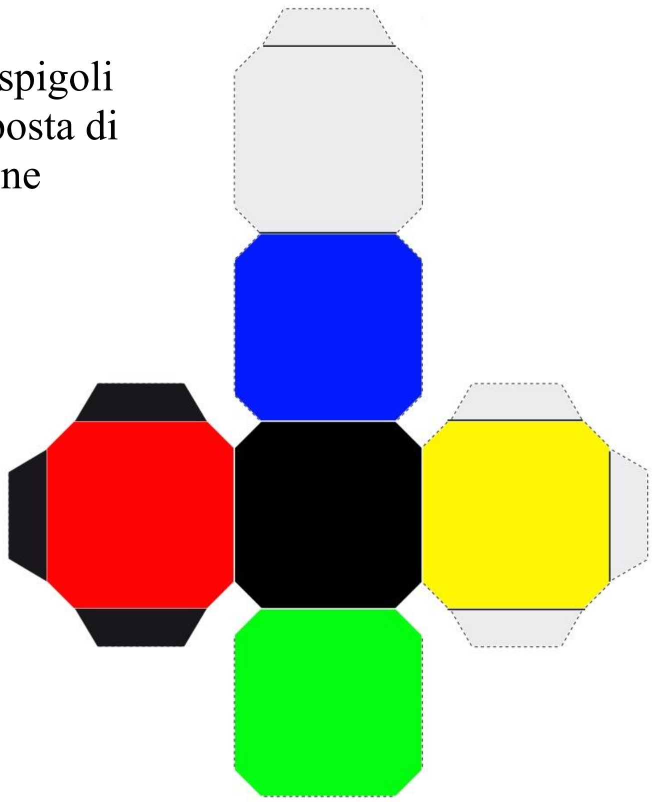
Qui sotto alcuni possibili sviluppi bidimensionali del cubo. Sono gli unici possibili, o riuscite ad individuarne altri? (1) Supponendo di doverne costruire una versione di carta, sono indicate nel primo caso alcune possibili posizioni per le linguette dove mettere la colla. Quante diverse posizioni sono possibili? (2)
Provate a segnarle anche nelle rimanenti 5 configurazioni.



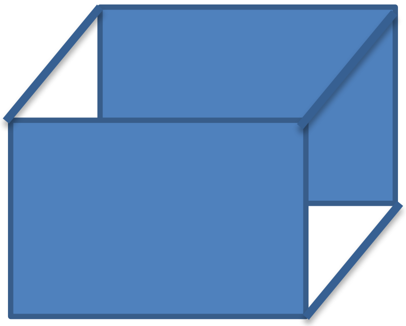
Il problema del cammino minimo: qual è il cammino più breve che un ragno deve compiere per andare dal punto A al punto B camminando lungo le pareti? (3)

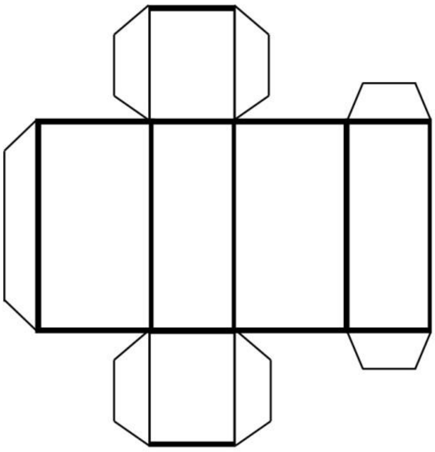


Il dado, ossia il cubo con angoli e spigoli smussati. A lato una semplice proposta di sviluppo. In realtà in questa versione risultano “smussati” i soli vertici.



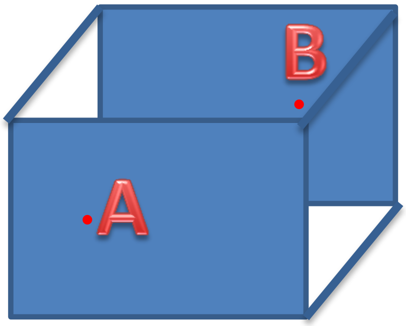
PARALLELEPIPEDO

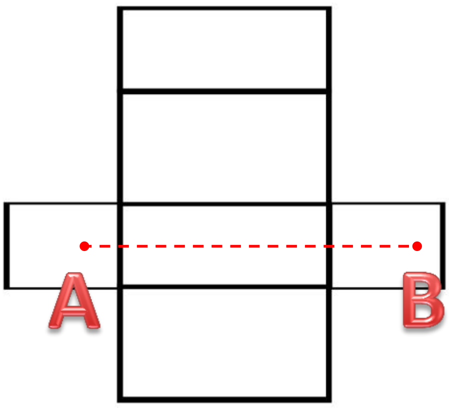




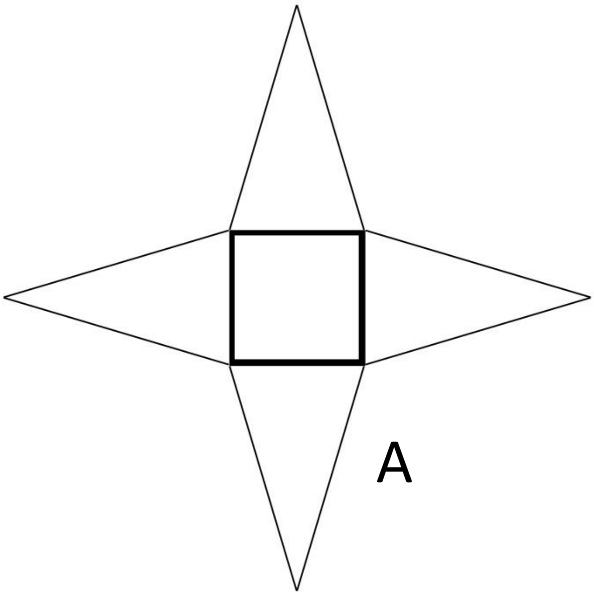
Un possibile sviluppo per un parallelepipedo. Potete indicare gli altri? Quanti sono? (4)
Nota: il problema è piuttosto insidioso, a causa delle numerose combinazioni indipendenti possibili. Chi non ha pazienza può saltare direttamente al problema successivo.

Il problema del cammino minimo:
il cammino indicato è il più breve? (5)

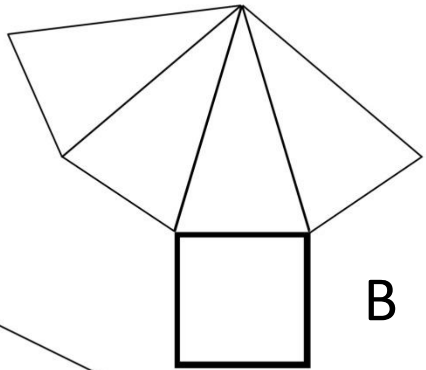




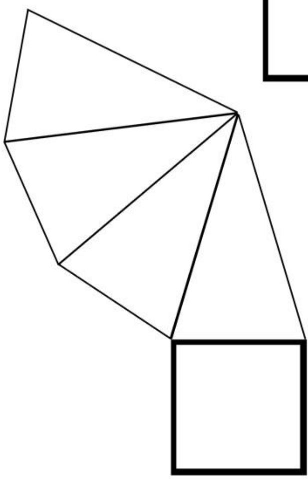
PIRAMIDE A BASE QUADRATA



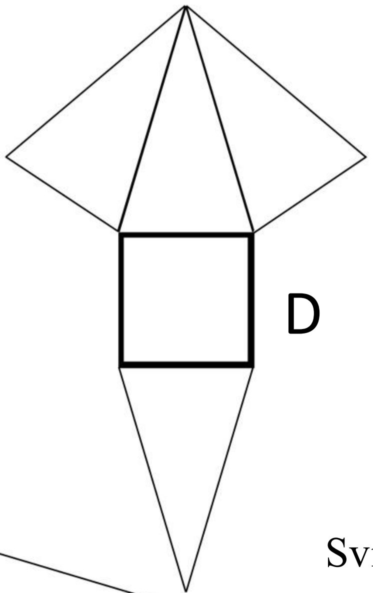
A



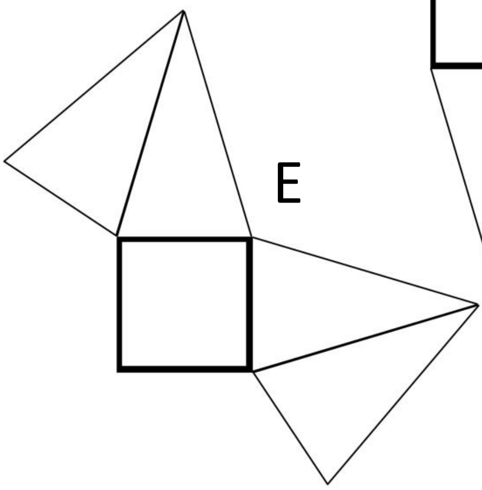
B



C



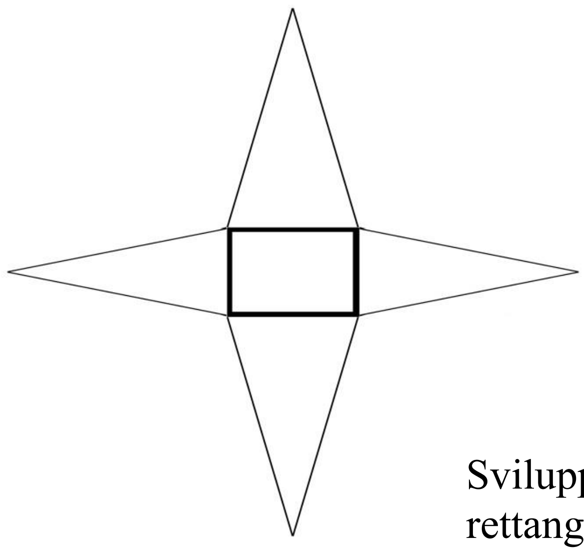
D

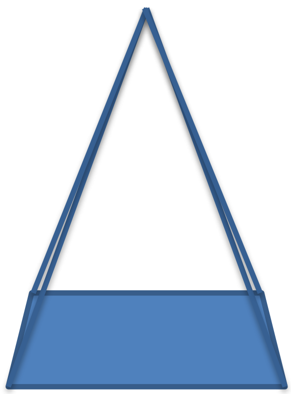


E

Sviluppi per una piramide a base quadrata. Ne sono possibili altri? (6)

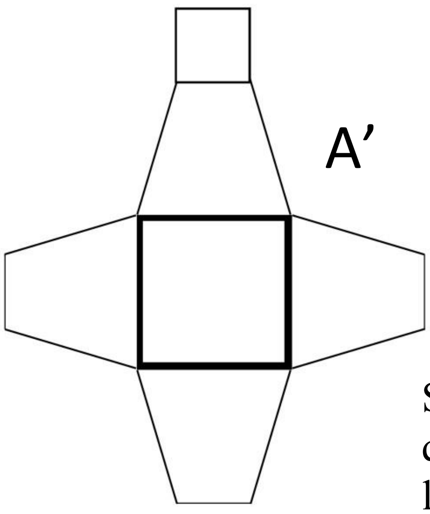
PIRAMIDE A BASE RETTANGOLARE

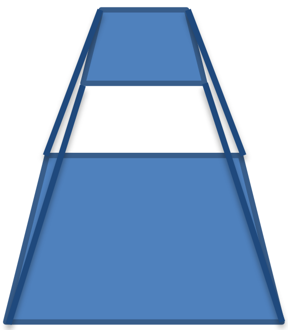




Sviluppo per una piramide a base rettangolare. Quanti altri sono possibili? (7)

TRONCO DI PIRAMIDE (A BASE QUADRATA)

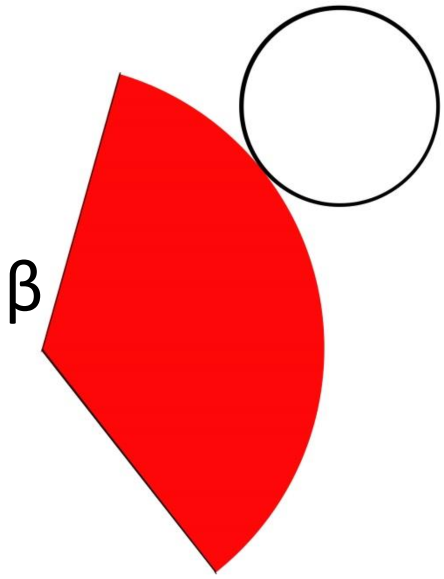


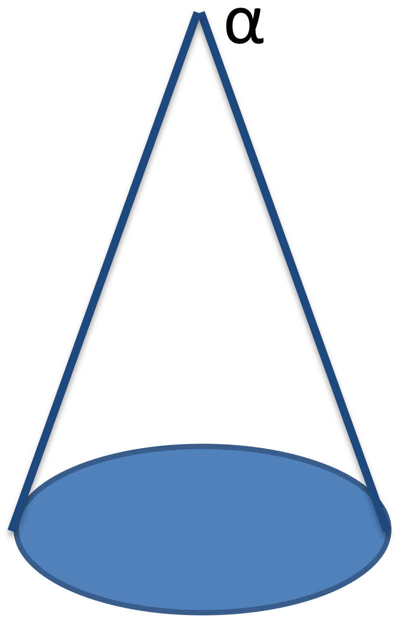


Sviluppo per tronco di piramide a base quadrata. Il lato del quadrato piccolo, il lato del quadrato grande e l’altezza della piramide sono quantità indipendenti, o esiste una relazione fissa tra esse? (8)

Quanti sono i possibili sviluppi? (9)

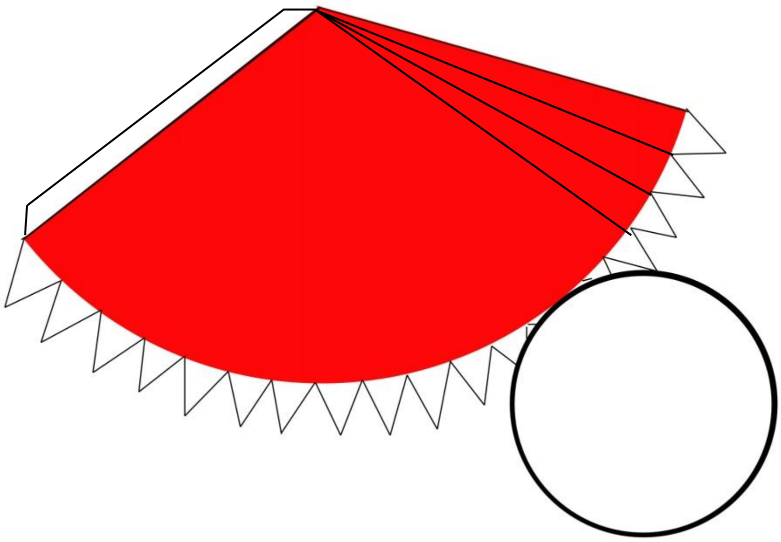
CONO



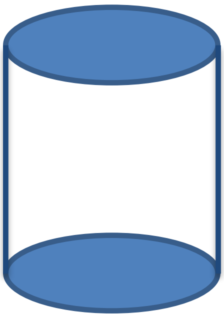


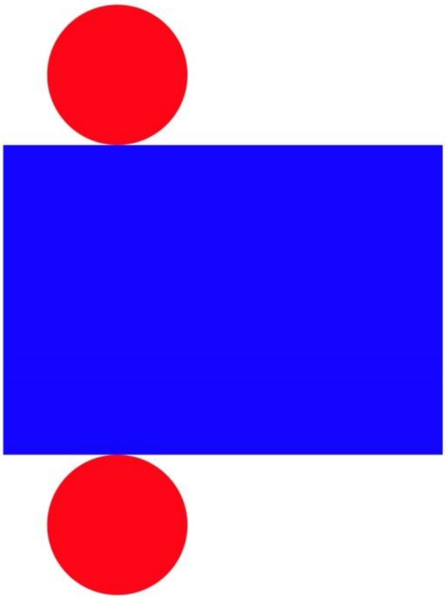
Che relazione c'è tra l'angolo del cono α e l'angolo del suo sviluppo β? (10)   (nota: la soluzione richiede una minima conoscenza di trigonometria piana

Anche se il solido è perfettamente sviluppabile sul piano, a rigore la sua costruzione materiale sarebbe impossibile. Le "linguette" infatti dovrebbero in teoria essere infinitesime per poter essere piegate senza distorsioni, come si può vedere nella seguente figura.



CILINDRO

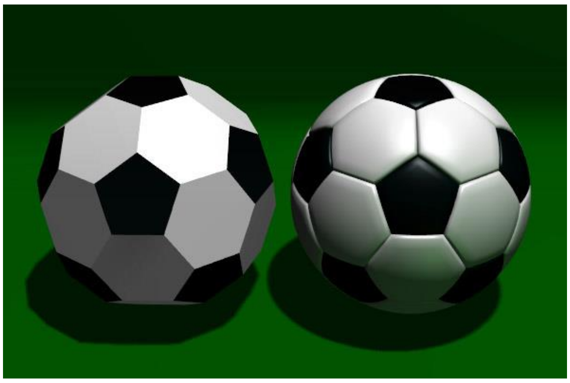


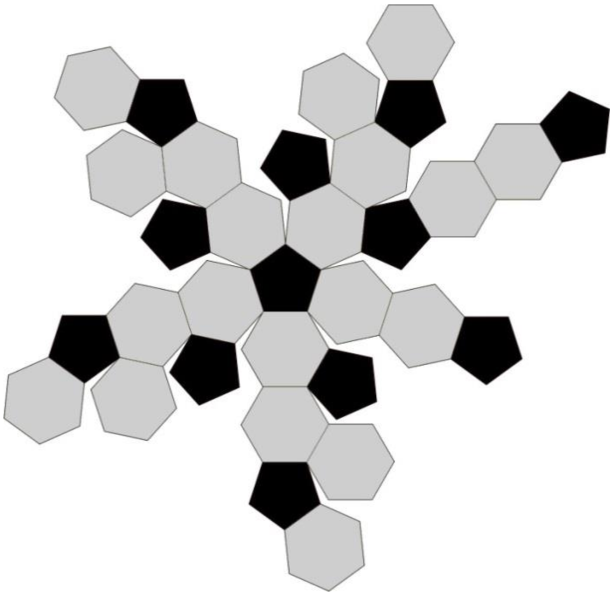


Per il cilindro valgono le stesse considerazioni fatte per il cono: in linea di principio il numero di linguette per la colla dovrebbe essere infinito.
Le dimensioni del rettangolo possono essere arbitrarie? (11)

ICOSAEDRO TRONCATO

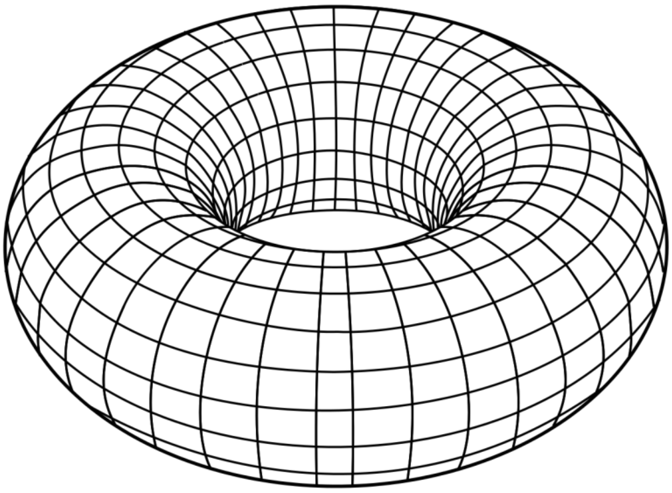
A dispetto del nome complicato, si tratta di un solido che tutti conoscono benissimo. Corrisponde infatti alla forma geometrica del classico pallone da calcio, costituito da 12 facce pentagonali e 24 esagonali. Di seguito è indicato un possibile sviluppo. Siete in grado di aggiungere le linguette di incollaggio? (12)



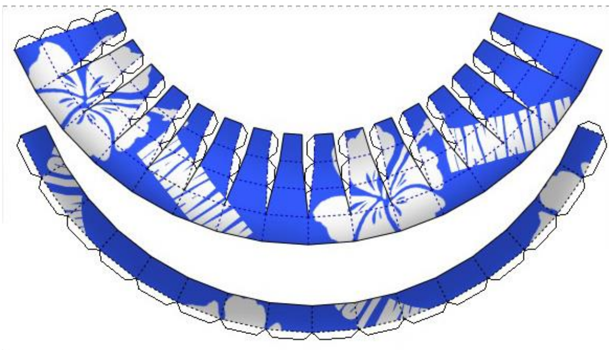


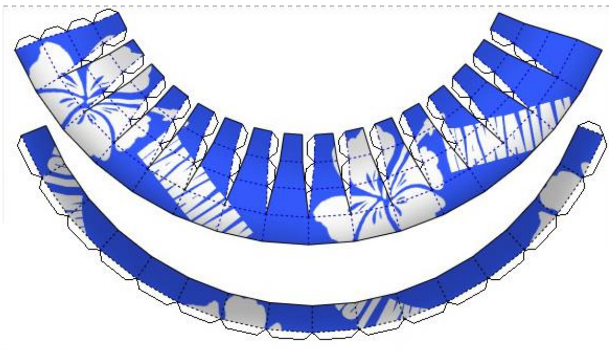
SOLIDI NON SVILUPPABILI

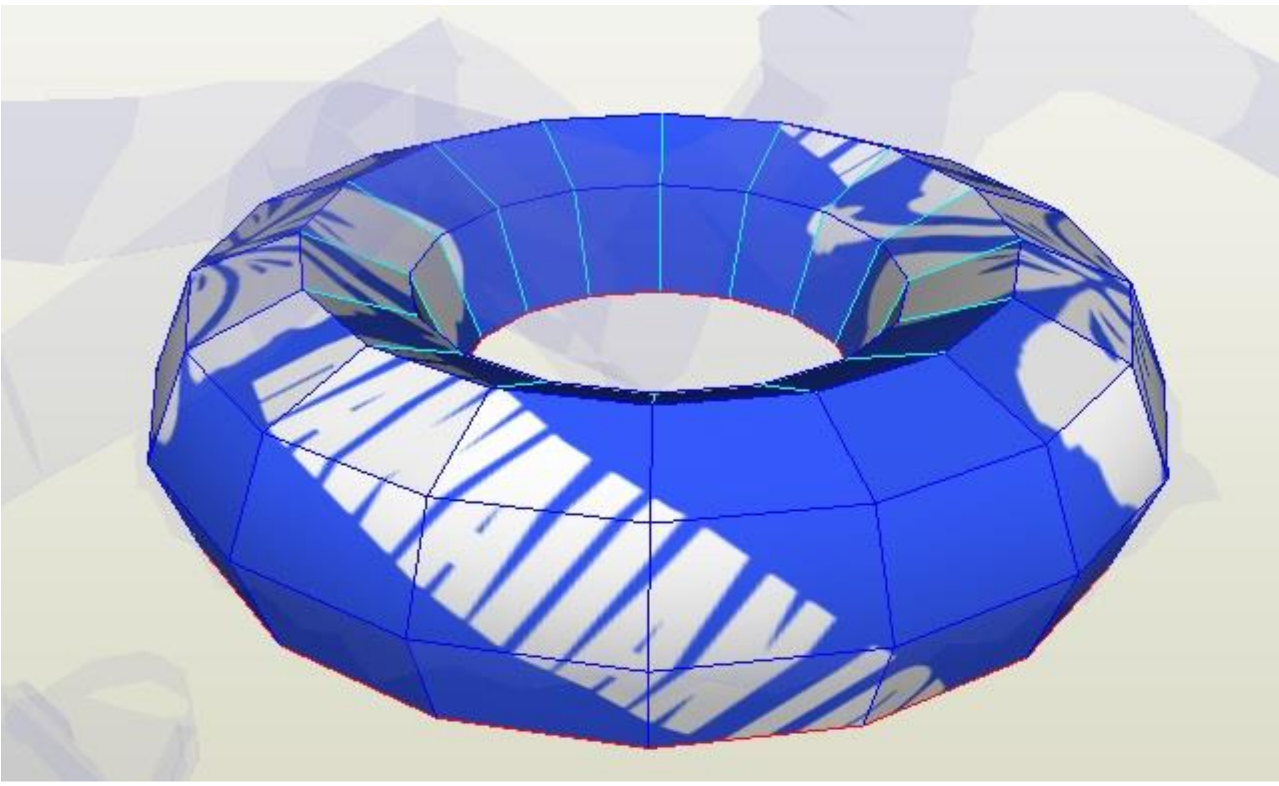
TORO (ciambella)



E’ possibile in questi casi approssimare il solido mediante minuscole superfici piane (in linea di principio infinite) Qui sotto un esempio concreto di sviluppo di una ciambella-salvagente. Le due metà sono identiche.



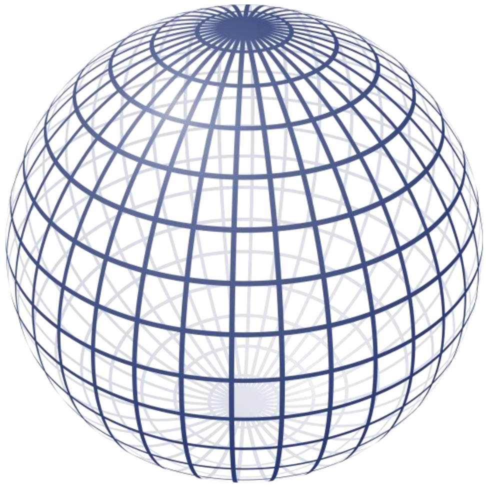


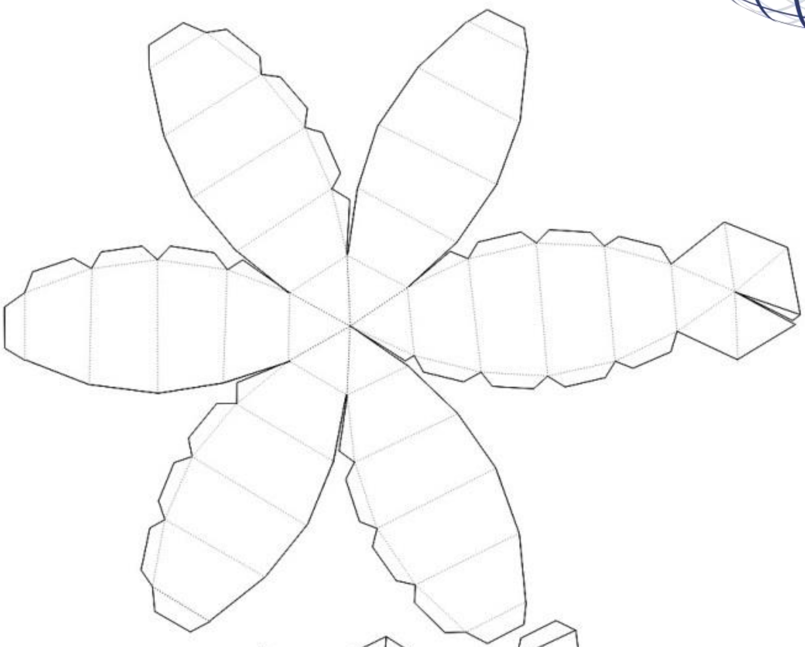


SFERA

Anche in questo caso è possibile approssimare la sfera con un solido a molte facce. Qui sotto due esempi di sviluppo. Quante facce contengono? (13)

I due sviluppi sono equivalenti? (14)





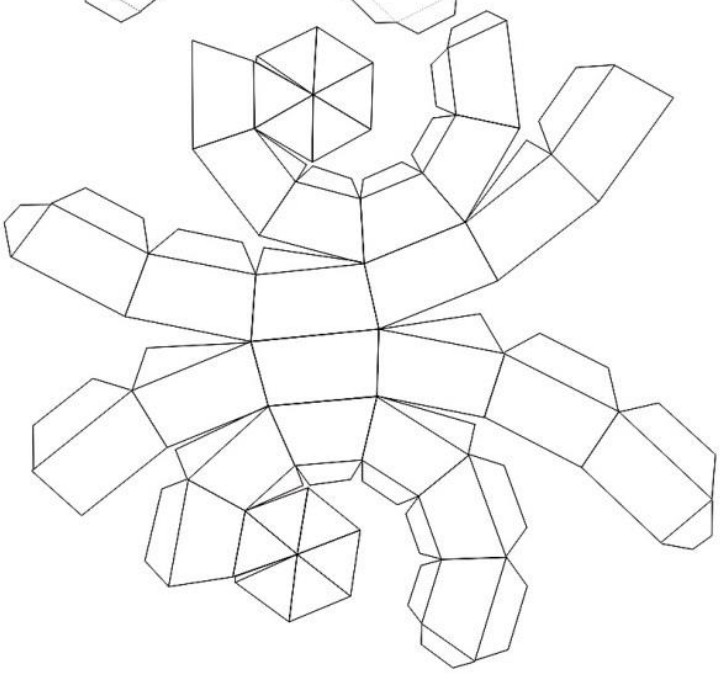


FIGURE GEOMETRICHE COMPLESSE

Come già osservato, la maggior parte delle costruzioni umane è strutturata proprio sulle forme dei solidi elementari. Dagli edifici ai manufatti più complessi, ogni cosa può in genere essere ricondotta a combinazioni geometriche semplici. La immagine qui sotto mostra come una "città" (seppure semplificata e stilizzata all'essenziale) può essere schematizzata in termini di cilindri, parallelepipedi, e via dicendo.

Modellini di carta di questo tipo vengono comunemente detti "papercraft". E' possibile trovare in rete innumerevoli "template", ovvero i modelli di sviluppo con le istruzioni di assemblaggio, aventi per tema oggetti comuni, monumenti storici e molto altro. Le immagini seguenti illustrano meglio di qualsiasi discorso le possibilità concrete che essi offrono.

Modello di San Basilio, Mosca.

Modello della Cattedrale di Ginevra

FIGURE NON GEOMETRICHE

E’ possibile sviluppare su piano anche figure non geometriche, come ad esempio il corpo umano o animale. In questo caso la forma solida può essere scomposta in innumerevoli piccole superfici piane, in modo analogo a quanto già visto per la sfera o per il toro. Ovviamente gli sviluppi risulteranno significativamente più complicati, e difficilmente potrebbero essere realizzati senza l’utilizzo di programmi specifici. Uno dei più noti, sviluppati in Giappone, è “*Pepakura Designer*”, scaricabile gratuitamente da internet. La versione “*Pepakura Viewer*” consente più semplicemente di visualizzare i file generati (caratterizzati dall’estensione “.pdo”). Le immagini seguenti mostrano alcuni dei risultati ottenibili con questo software. I modellini riprodotti sono stati materialmente assemblati (con gran fatica) dal sottoscritto.

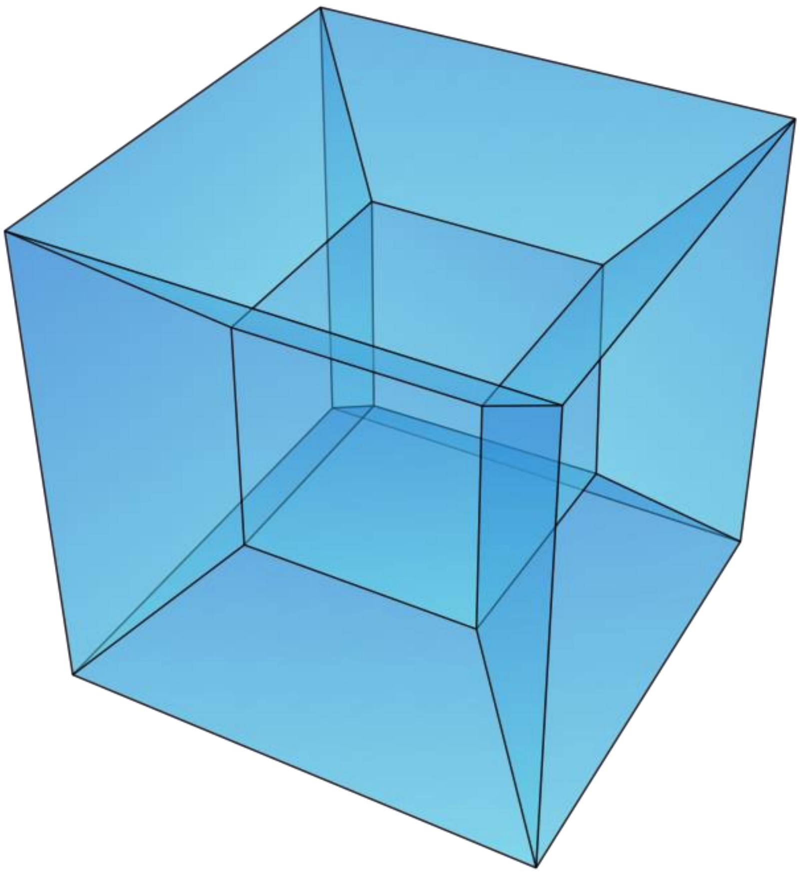




R 101
G-FAAW
Airship R101

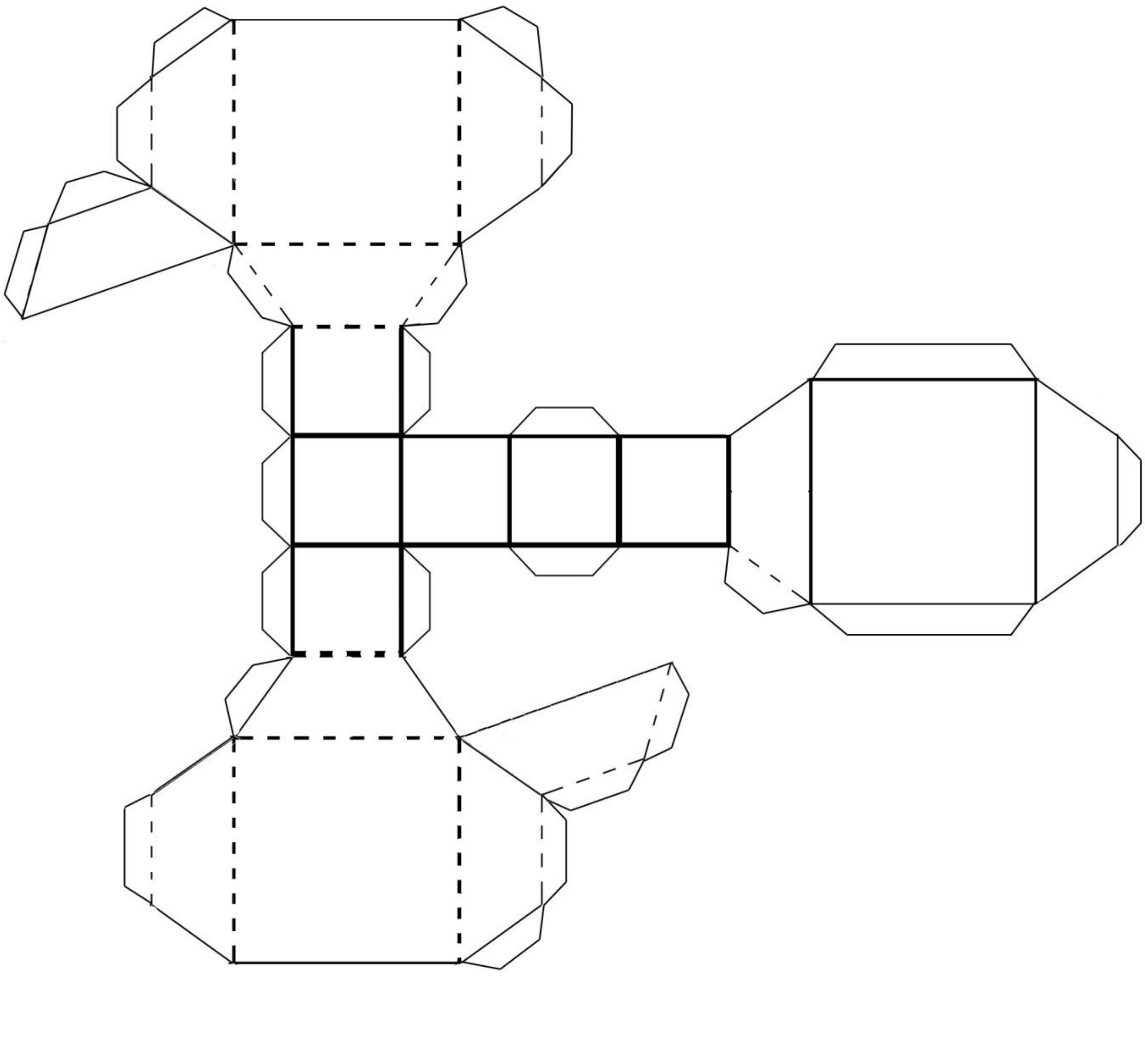
SOLIDI “IMPOSSIBILI”

Concludiamo questo viaggio nel mondo dei solidi con due figure “impossibili”, l’**ipercubo** e la **scala infinita**. Il primo corrisponde ad un cubo in quattro dimensioni, un oggetto facilmente definibile in termini matematici, ma impossibile da visualizzare. E’ possibile però visualizzarne la proiezione tridimensionale, ossia l’equivalente dell’ombra proiettata da un cubo su un piano bidimensionale. Si tratta in sostanza di un solido costituito da due cubi, uno dentro l’altro, con gli spigoli connessi come nella figura qui sotto. Si noti che in realtà il modello sottostante corrisponde ad un preciso “punto di vista” dell’ipercubo. Ruotando idealmente il solido nello spazio quadridimensionale, le posizioni e le dimensioni dei due cubi cambiano significativamente, al punto che il cubo interno può diventare esterno e viceversa! Sono disponibili a tal proposito degli ottimi filmati, sempre su internet.

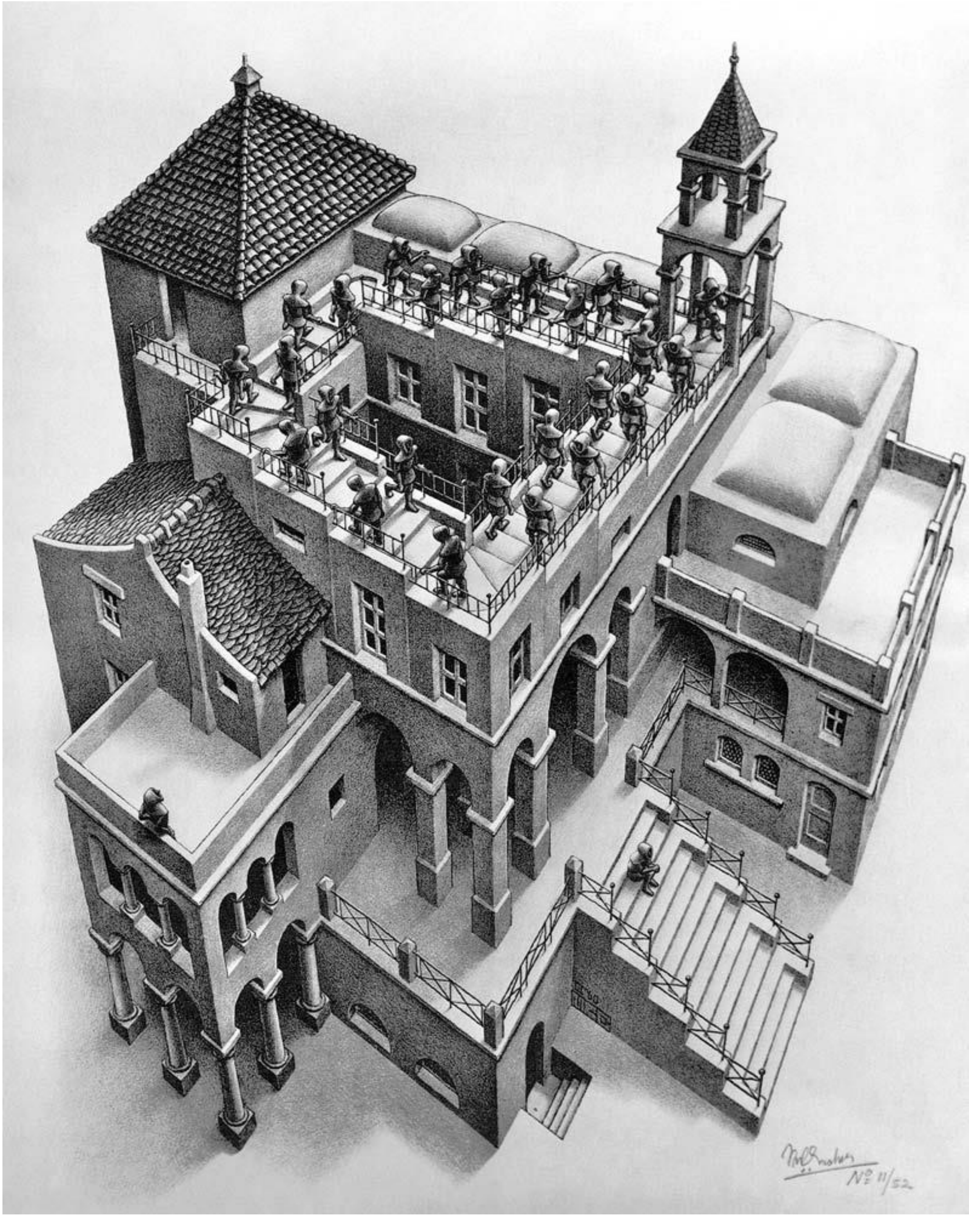


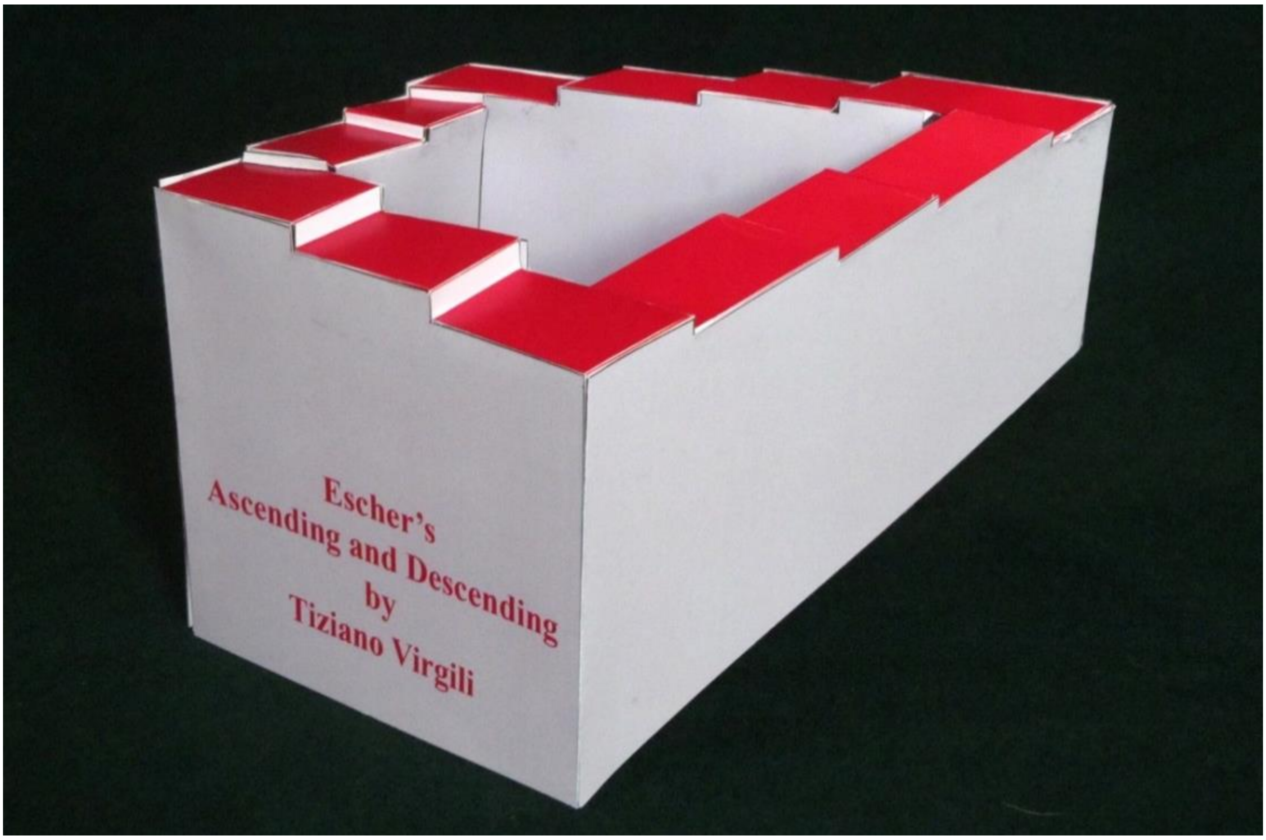
Qui sotto è proposto una possibile modello di sviluppo, che in realtà lascia aperte tre delle facce esterne, in modo da poter osservare il cubo centrale. Attenzione: i lati con la linea tratteggiata indicano che la piegatura deve essere fatta in modo inverso (a forma di valle).

I trapezi che uniscono le facce dei due cubi possono avere forma qualsiasi o devono rispettare determinate proporzioni? (15)



La “scala infinita”, o scala di Penrose consiste in una illusione ottica che mostra un ciclo di gradini sempre discendenti (o sempre ascendenti). E’ stata utilizzata da Escher nel suo classico “Ascending and Descending”, mostrato qui sotto. Una versione estremamente schematica è stata realizzata in forma di papercraft dal sottoscritto (vedere pagina seguente).





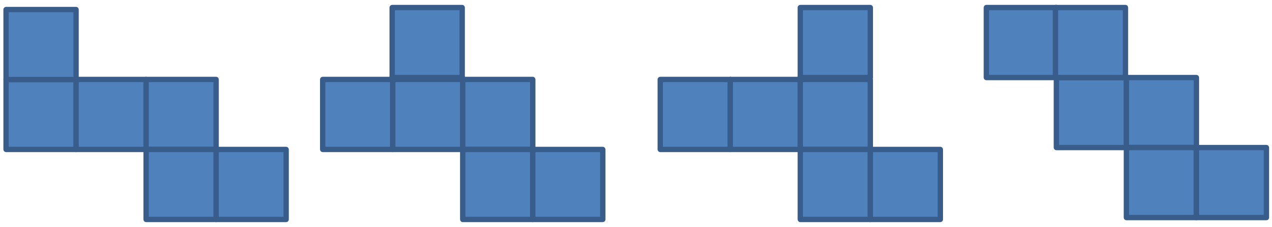
Papercraft che realizza la “scala impossibile”. Normalmente questi modellini funzionano solo se osservati da un particolare punto di vista. Quello che accade infatti è che la scala non è realmente chiusa, ma solo grazie ad un effetto prospettico le due estremità sembrano combaciare. In questo caso tuttavia il meccanismo di illusione è differente. Riuscite ad indovinare il trucco? (16)

SOLUZIONI

Cubo

Problema 1 :

Sono possibili in aggiunta ai sei, i seguenti sviluppi:



Si veda anche il problema 4

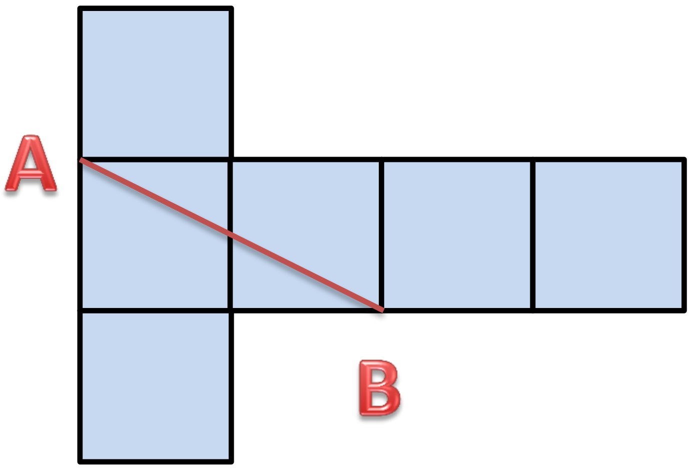
Problema 2 :

Ci sono 14 lati da incollare, corrispondenti a 7 spigoli e 7 linguette. Per ogni spigolo è possibile scegliere arbitrariamente uno dei due lati sul quale disegnare la linguetta, per cui il numero totale di combinazioni è dato da :

$$N = 2^7 = 128$$

Problema 3:

Il percorso più breve è indicato nella seguente figura.



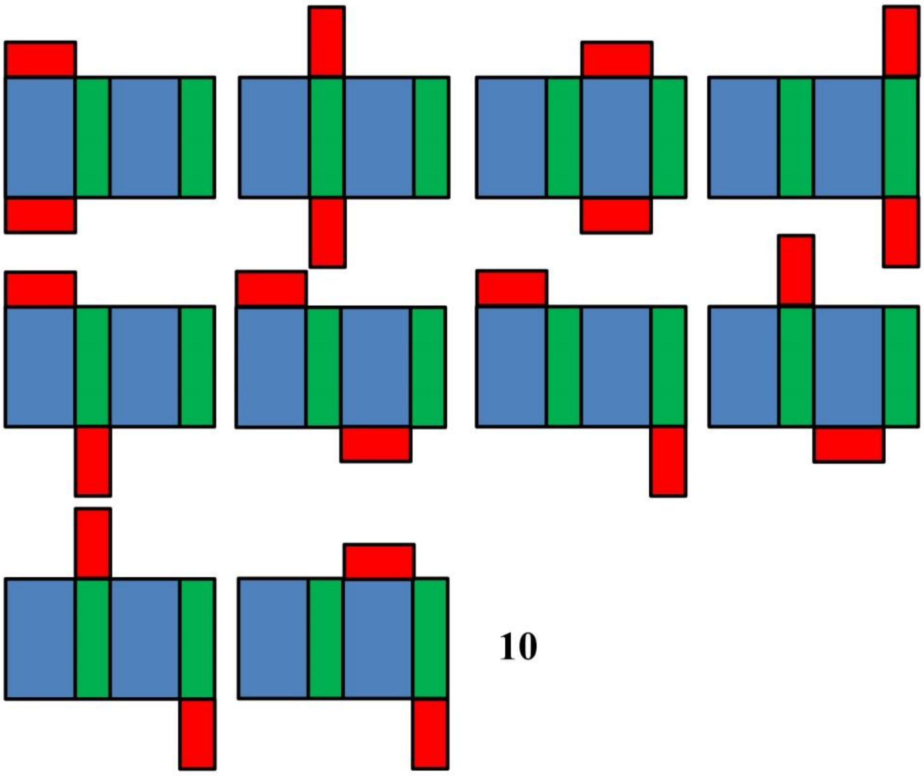
Parallelepipedo

Problema 4 :

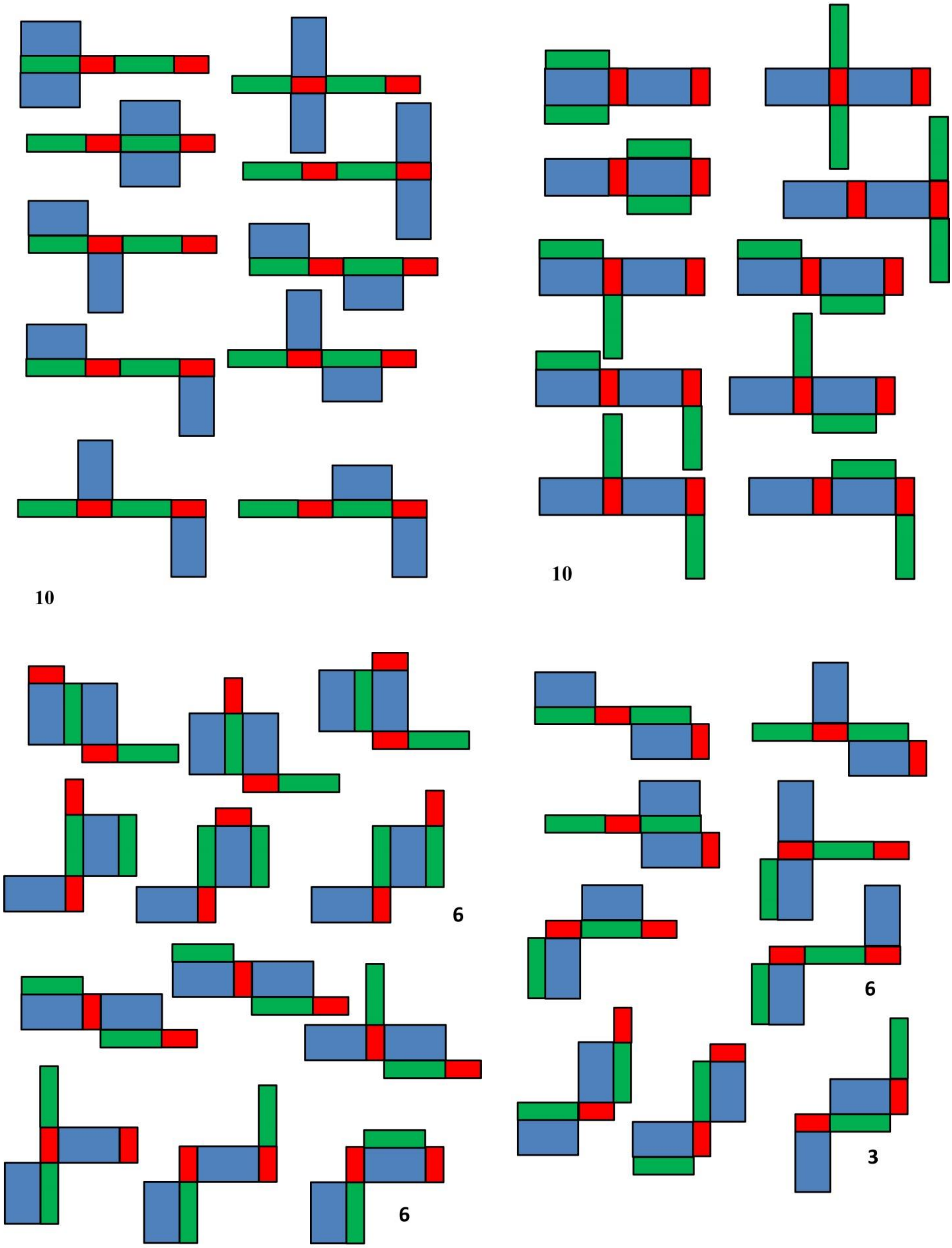
Come per il cubo, il parallelepipedo possiede dodici spigoli che uniscono le sue sei facce. Un qualunque sviluppo contiene cinque spigoli uniti, e i restanti sette “aperti”. In teoria, i possibili modi di scegliere cinque elementi su dodici è dato da:

$$N = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 792$$

In realtà, questo numero contiene moltissime combinazioni sbagliate, ad esempio quelle che “staccano” completamente una o due facce dalle altre. Inoltre molte di esse si possono ottenere dalle altre per rotazione e/o riflessione. Di sotto e nelle pagine successive sono indicati tutti i possibili modi di sviluppo indipendenti. Individuate il criterio di ordine?



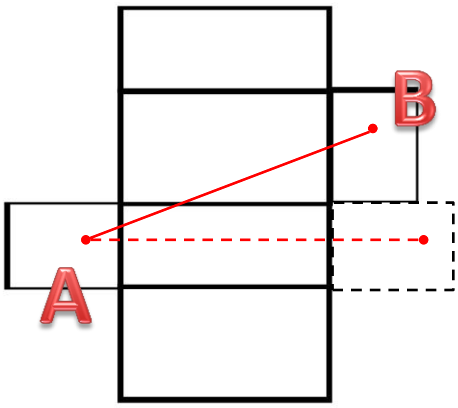
10



Il numero totale di configurazioni indipendenti (che non possono essere ottenute per riflessione o rotazione) è così $10 \times 3 + 6 \times 3 + 3$=**51**. Nel caso del cubo, come abbiamo visto, gran parte di queste sono equivalenti e solo **10** sono quelle indipendenti (6+3+1).

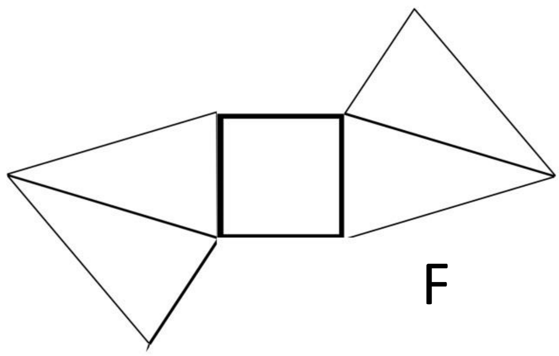
Problema 5 :

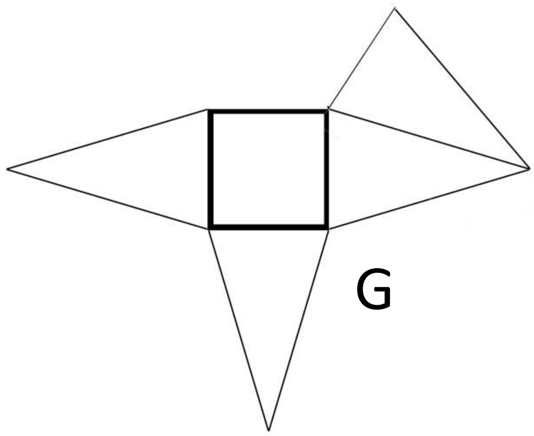
Il cammino minimo è indicato in figura. Come si vede è leggermente inferiore rispetto a quello proposto (linea tratteggiata).



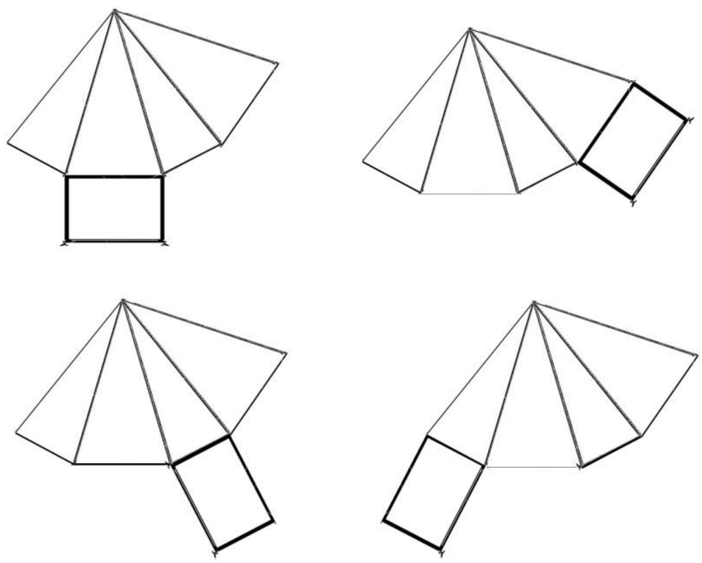
Piramide

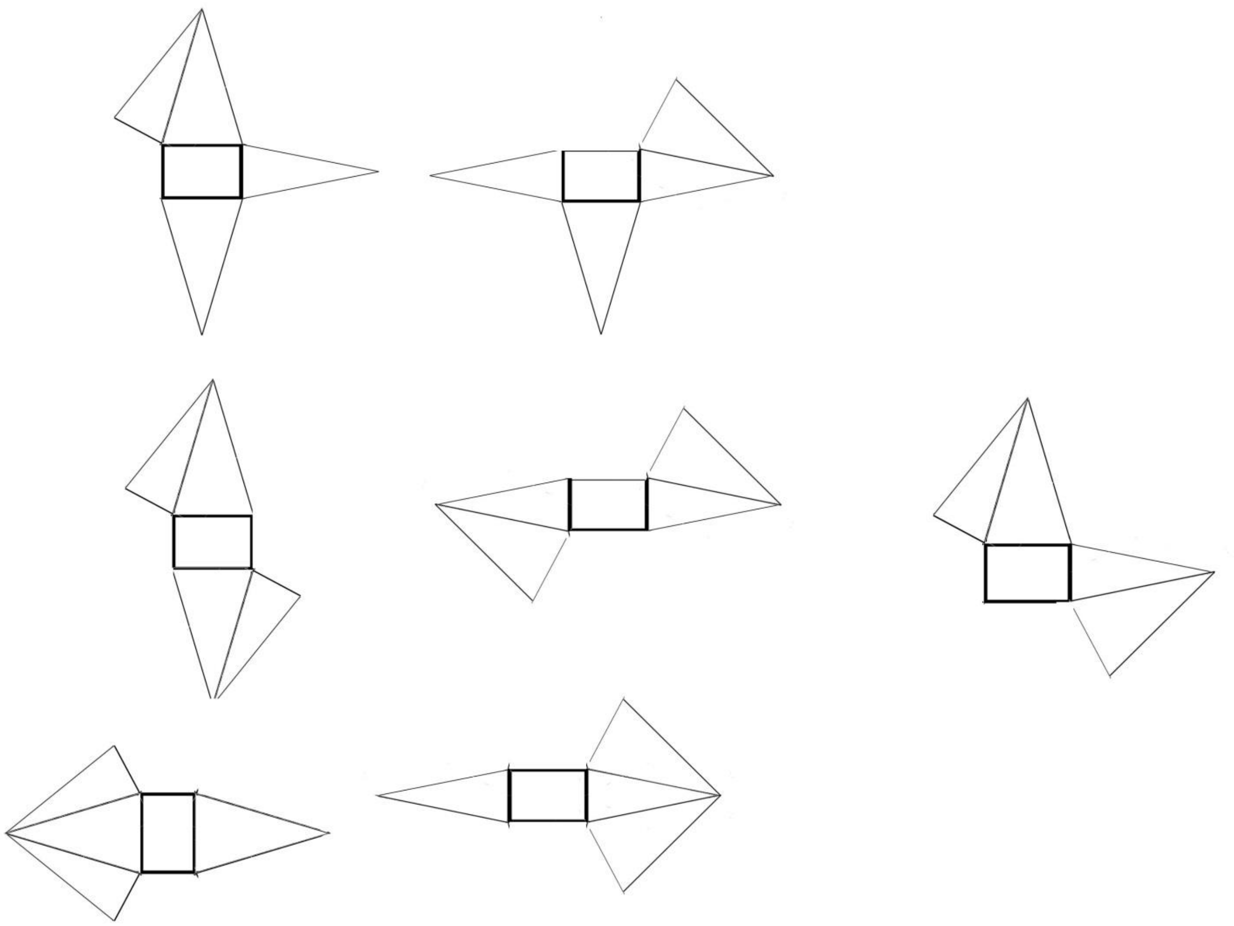
Problema 6 : sono possibile due ulteriori configurazioni, per un totale di **7**





Problema 7 : in questo caso sono possibili ulteriori configurazioni, indicate di seguito, per un totale di 1+4+2+3+2=**12** combinazioni.

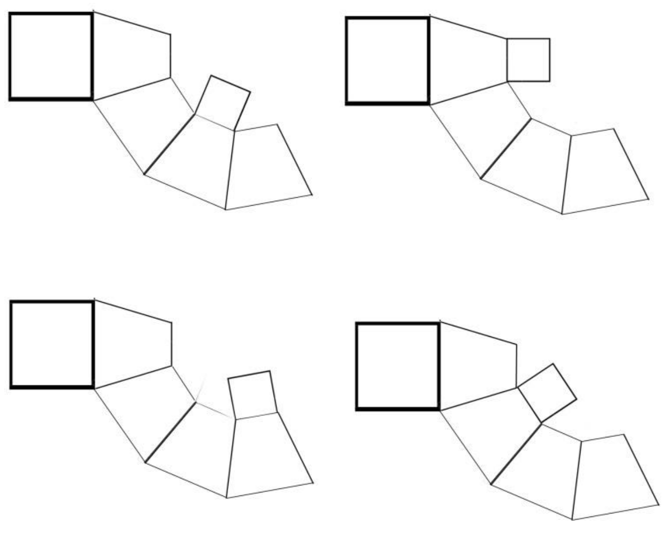




Problema 8 : altezza e lati delle basi maggiore e minore sono quantità indipendenti.

Problema 9 : Facendo riferimento agli sviluppi visti per la piramide a base quadrata, si ha che le configurazioni A e A’ sono equivalenti e danno luogo ad una sola combinazione; le configurazioni B e C danno invece luogo a 4 combinazioni ciascuna (vedere figura sotto). Per finire le configurazioni D ed E danno luogo a 3 e 2 configurazioni rispettivamente, mentre F e G a 2 e 4, per un totale di

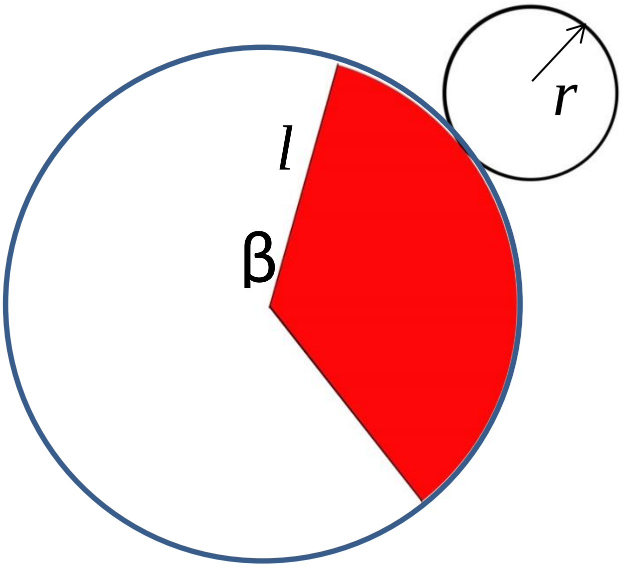
1+4+4+3+2+2+4=**20**

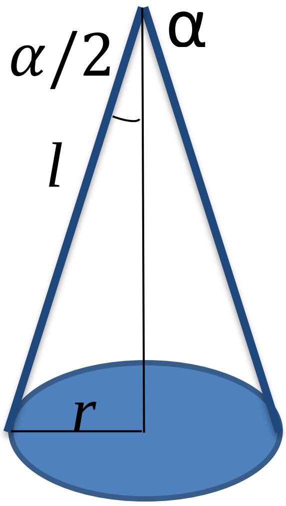


Cono

Problema 10 : chiamando l il lato del cono e r il raggio, si ha (vedere figura):

$r = l\sin(\alpha/2)$ $\qquad$ $\beta = \frac{2\pi r}{2\pi l}$ $\qquad$ $\beta = \sin(\alpha/2)$



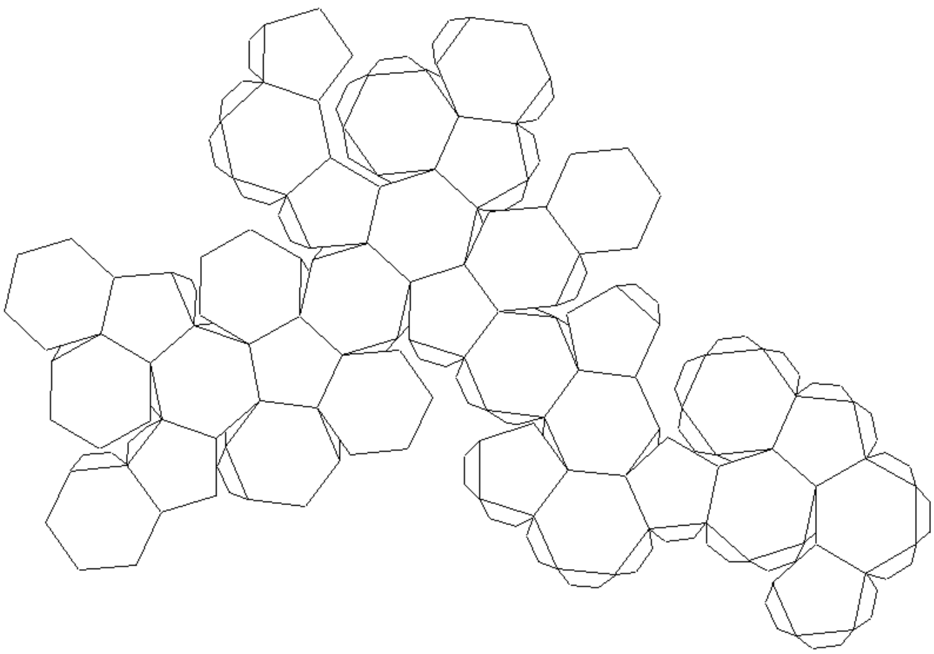


Cilindro

Problema 11 : l’altezza del rettangolo coincide con l’altezza del cilindro è arbitraria, la lunghezza deve essere pari alla circonferenza $2\pi r$.

Icosaedro troncato

Problema 12 : esempio di possibile disposizione per le linguette di incollaggio.



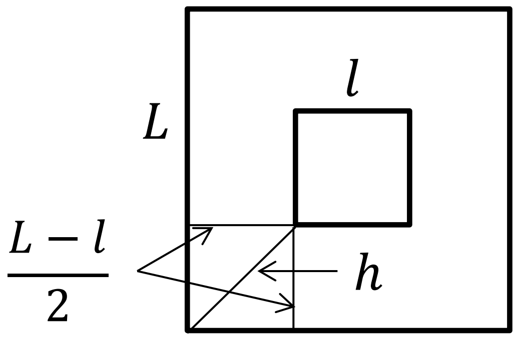
Sfera

Problema 13 : in entrambi i casi ci sono **36** facce.

Problema 14 : i due sviluppi sono perfettamente equivalenti, nel senso che producono la stessa forma solida.

Ipercubo

Problema 15 : l'altezza del trapezio è legata alle basi L e l dalla seguente relazione (vedere la figura sottostante): $h = \sqrt{2} \cdot \frac{(L-l)}{2}$.



Scala infinita

Problema 16 : il lato a destra sembra lungo e in discesa, in realtà è molto corto e in salita.

Indice

Tiziano Virgili (Roma, 1964) è un Fisico sperimentale presso l'Università degli Studi di Salerno e associato all'INFN. Dal 1988 partecipa ad esperimenti di fisica delle alte energie presso i laboratori del CERN nell'ambito di vaste collaborazioni internazionali, ultimo in ordine cronologico l'esperimento ALICE ad LHC. E' autore di numerose pubblicazioni scientifiche, nonché titolare di corsi universitari relativi alla fisica nucleare e subnucleare. Nel tempo libero segue numerosi hobby tra i quali la musica, il cinema asiatico e d'animazione e la realizzazione di giochi di società.