La formula più bella (e cosa c'è dietro)

Francesco Vissani

apr. 2020 / n. 4

Quaderni di Cultura Scientifica

La formula più bella della matematica
(e cosa c'è dietro)

Francesco Vissani
Laboratori Nazionali del Gran Sasso &
Gran Sasso Science Institute

4º QUADERNO - PESCARA, 2020

Nella scuola superiore italiana, l'educazione scientifica viene principalmente demandata all'omonimo liceo; altre scuole usano strade di accesso diverse e spesso altrettanto valide. I corsi di matematica coprono la geometria euclidea, l'algebra e la trigonometria, e nell'ultimo anno ci si avvicina all'analisi.

Nel seguito, ci appoggiamo a questo *corpus* di conoscenze - evitando però l'analisi nel testo principale - per introdurre tre importanti numeri: π (pi greco), i (l'unità immaginaria) ed e (la cosiddetta costante di Nepero), che son legati tra di loro da alcune importanti formule, inclusa quella di Eulero e quella che vien detta *la formula più bella*. Lo scopo della discussione non è puramente illustrativo ma introduttivo ed in una qualche misura demistificatorio. Varie note a pie' di pagina offrono esercizi per controllare i progressi su quello che viene imparato e alcune appendici presentano ulteriore materiale ad uso degli interessati.

Questo quaderno è stato preparato durante l'isolamento dei primi mesi del 2020, in conseguenza dell'epidemia dovuta al COVID-19. Lo vorrei dedicare a tutte le studentesse e gli studenti che hanno partecipato al premio ASIMOV negli scorsi cinque anni, alcuni dei quali ho avuto addirittura il piacere di conoscere di persona. Dai ragazzi, che ce la faremo!

Sommario

Capitolo 1

Introduzione al pi greco

Sono contento di iniziare questa discussione ragionando su un problema considerato da Archimede di Siracusa [1], che fu forse il primo uomo del pianeta riuscì a realizzare una procedura per stimare con precisione il numero che oggi chiamiamo pi greco. L'idea è di offrire delle considerazioni basate sulla matematica che si studia alla scuola superiore, ma in un modo che potrebbe stimolare ad imparare qualcosa di più; e in effetti, come vedremo, per mettersi alla pari con Archimede ci sarà da pedalare...

Partiamo dalla definizione (su cui ragioneremo)

> Il rapporto tra la circonferenza del cerchio C ed il suo diametro d è un numero indicato con π, leggasi pi greco.

da cui segue immediatamente che il rapporto tra circonferenza e il raggio r vale 2π, siccome $r = d/2$. Quindi un metodo per misurar-

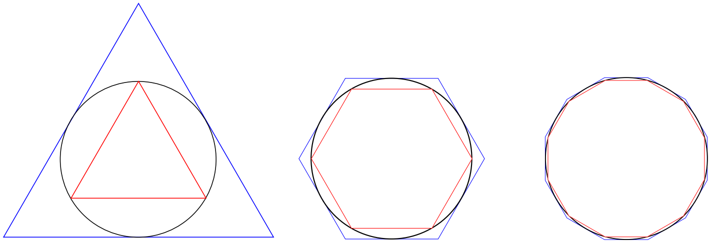


Figura 1.1: *Poligoni regolari inscritti (in rosso) e circoscritti (in blu) alla stessa circonferenza, con un numero di lati pari a 3, 6 e 12.*

lo è di usare un pezzo di corda; ma purtroppo questa procedura è soggetta a limiti pratici.

1.1 La procedura di Archimede

La procedura utilizzata[1] da Archimede è di considerare due insiemi di poligoni regolari con N lati, e precisamente quelli inscritti e quelli circoscritti al cerchio che ci interessa. L'idea, apprezzabile dalla Fig. 1.1, è che ci avviciniamo sempre di più alla misura desiderata al crescere del numero di lati; e più precisamente, dal perimetro M_N del poligono inscritto abbiamo una *sottostima* della circonferenza (ovvero una stima per difetto), mentre dal perimetro P_N del poligono circoscritto abbiamo una *soprastima* della stessa (ovvero una stima

[1] Il bel libro di Umberto Bottazzini [2] ricostruisce tra le altre cose la storia di come questa procedura venne proposta, raffinata, discussa e criticata in seno alla cultura greca, prima di arrivare a sfruttarla fino in fondo. Riuscire a riconoscere i precedenti contributi di Antifonte, Brisone ed Eudosso (e di immaginarne altri ancora, magari di precedenti civiltà) non toglie nessun merito ad Archimede ma permette invece di argomentare l'inconsistenza del mito del 'genio isolato'.

per eccesso), cioè:

$$M_N < C < P_N \tag{1.1}$$

(M è l'iniziale di 'meno', P è l'iniziale di 'più'.) Nella figura vediamo i casi del triangolo equilatero, dell'esagono e del dodecagono, che illustrano anche le due caratteristiche

$$M_2 < M_3 < M_4 < M_5 ... < P_5 < P_4 < P_3 \tag{1.2}$$

di cui non ci servirà una dimostrazione formale immediatamente, ma ci torneremo; in questa fase della discussione, possiamo pensare a questa proprietà come a un'intuizione, a uno spunto, a un progetto.[2]

La prossima domanda allora è: come facciamo a calcolare questa enormità di numeri? L'idea è di iniziare da un caso semplice, p.e. da un poligono di pochi lati, contando sul fatto che si possa sapere la risposta; poi raddoppiamo di volta in volta il numero di lati, sperando di riuscire a calcolare il risultato; e ripetiamo finchè non ci stanchiamo o raggiungiamo un certo obiettivo.

1.1.1 Il poligono di partenza

Partiamo dai poligoni con $N = 3$ ed $N = 4$ lati. Si trova che

$$M_3 = 3 \times \sqrt{3}\ ,\ P_3 = 3 \times 2\sqrt{3}\ ,\ M_4 = 4 \times \sqrt{2}\ ,\ P_4 = 4 \times 2 \tag{1.3}$$

se misuriamo tutto in unità del raggio. Per dimostrarlo facciamo così.

[2] Se ci aiuta o se vogliamo, possiamo anche pensare ai lati dei poligoni come a tratti di filo non deformabile tesi tra due vertici.

Partiamo dal triangolo inscritto. Dal suo vertice A tracciamo un diametro fino al punto B sulla circonferenza. Esso appartiene ad un esagono regolare (vedi Fig. 1.2) dunque $\overline{\mathrm{BC}} = r$, come risulta dal triangolo OBC.[3] Euclide dice che ABC è un triangolo rettangolo, con ipotenusa $\overline{\mathrm{AB}} = 2r$. Dal teorema di Pitagora troviamo la lunghezza del lato,

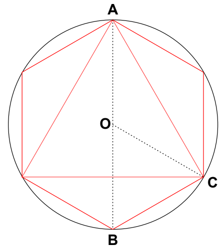


Figura 1.2: *Calcolo del lato del triangolo equilatero inscritto.*

$$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2 - \overline{\mathrm{BC}}^2} = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{3}r \tag{1.4}$$

Scegliendo per comodità $r = 1$ ne segue il primo risultato.

Un modo per stimare le dimensioni del triangolo circoscritto (vedi Fig. 1.1) è ruotare il triangolo inscritto di 60° in modo che i suoi vertici coincidano con i punti di tangenza di quello circoscritto; dovrebbe risultare evidente allora che il triangolo circoscritto ha il lato esattamente doppio di quello inscritto. Si procede in modo simile per i quadrati. Da qui in poi, per comodità, considereremo una circonferenza di raggio $r = 1$.

Archimede preferì partire dai triangoli.[4] È noto che i greci amavano profondamente i triangoli ed in effetti sono i poligoni più semplici e non troppo semplici; in effetti, a chi verrebbe in mente di considerare un poligono di due lati? (Risposta: *ai greci!* Riparleremo anche di questo.)

[3] Per dimostrare che il triangolo OBC è equilatero si calcoli l'angolo $\widehat{\mathrm{BOC}}$.

[4] Se vi sentite più a vostro agio con i quadrati, vi invito a provare ad adattare il ragionamento che segue. È un bel modo di fissare i concetti senza farsi confondere dai conti!

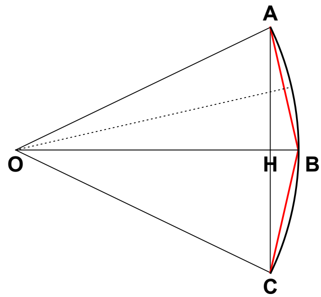


Figura 1.3: *Due lati* $\overline{\mathrm{AB}}$ *e* $\overline{\mathrm{BC}}$ *(in rosso) del poligono regolare con il doppio di lati del poligono di cui mostriamo il lato* $\overline{\mathrm{AC}}$*, entrambi inscritti in un cerchio di raggio unitario.*

1.1.2 La duplicazione dei lati

Facciamo riferimento alla Fig. 1.3. Il lato del poligono regolare di partenza vale

$$\ell = \overline{\mathrm{AC}} = 2\overline{\mathrm{AH}} \tag{1.5}$$

a partire da questo, ci serve trovare il lato del poligono con un numero doppio di lati, ovvero

$$\ell' = \overline{\mathrm{AB}} \tag{1.6}$$

Osservando attentamente la Fig. 1.3, ricordando che il raggio è unitario, ed applicando due volte il teorema di Pitagora, abbiamo

$$\overline{\mathrm{AH}} = \sqrt{1 - \overline{\mathrm{OH}}^2} \;\; ; \;\; \overline{\mathrm{HB}} = 1 - \overline{\mathrm{OH}} \;\; ; \;\; \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2 + \overline{\mathrm{HB}}^2} \tag{1.7}$$

da qui troviamo una espressione per il lato del nuovo poligono

$$\ell' = \sqrt{\overline{\mathrm{AH}}^2 + \overline{\mathrm{HB}}^2} = \sqrt{2(1-\overline{\mathrm{OH}})} = \sqrt{2\left(1-\sqrt{1-(\ell/2)^2}\right)} \tag{1.8}$$

siccome grazie ancora al teorema di Pitagora vale $\sqrt{1-\overline{\mathrm{OH}}^2} = \overline{\mathrm{AH}} = \ell/2$. Una espressione che richiede meno sottrazioni e rende i calcoli numerici più agevoli si ottiene usando il trucco algebrico $1-x = (1-x)(1+x)/(1+x) = (1-x^2)/(1+x)$, che ci porta alla formula alternativa

$$\begin{aligned}\ell' = \sqrt{2(1-\overline{\mathrm{OH}})} &= \sqrt{\frac{2(1-\overline{\mathrm{OH}}^2)}{1+\overline{\mathrm{OH}}}} \qquad (1.9)\\ &= \overline{\mathrm{AH}} \times \sqrt{\frac{2}{1+\overline{\mathrm{OH}}}} = \frac{\ell}{\sqrt{2+\sqrt{4-\ell^2}}}\end{aligned}$$

Tanto la formula 1.8 e quella 1.9 ci permettono di stimare la circonferenza per difetto (=sottostima). Si può ripetere il ragionamento nel caso del poligono circoscritto, per avere anche una stima per eccesso; noi lo lasceremo fare ai lettori interessati e ci torneremo poi.

1.1.3 Stime del pi greco

Adesso, buttiamo giù qualche numero. Partendo dal triangolo equilatero calcoleremo il perimetro nel caso di poligoni con 6, 12, 24 lati. Iniziando da $N = 3$; usando la formula 1.4 che ci dice $\ell = \sqrt{3}$, applichiamo la formula 1.9 e troviamo:

$$\ell' = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{4-3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1 \text{ per } N = 6 \tag{1.10}$$

Ma come, tanti calcoli per giungere ad un risultato semplice semplice? Beh sì, in effetti, stiamo parlando di un esagono regolare ($N = 6$) ed il suo lato è proprio uguale al raggio... potevamo pensarci prima, ma va bene così. Armiamoci di pazienza, ridefiniamo $\ell = 1$ ed applichiamo di nuovo la formula 1.9, troviamo:

$$\ell' = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{4-1}}} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} \text{ per } N = 12 \tag{1.11}$$

Non è un gran bel numero, ma è proprio la lunghezza del lato del dodecagono.[5] Infine, poniamo questo ultimo numero uguale ad ℓ e applichiamo come di consueto la formula 1.9. Stavolta abbiamo

$$\ell' = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} \times \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{4-\frac{1}{2+\sqrt{3}}}}} \text{ per } N = 24 \tag{1.12}$$

per trattare il radicale più interno, usiamo un trucco simile al precedente

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2^2-3} = 2-\sqrt{3} \tag{1.13}$$

ed alla fine abbiamo

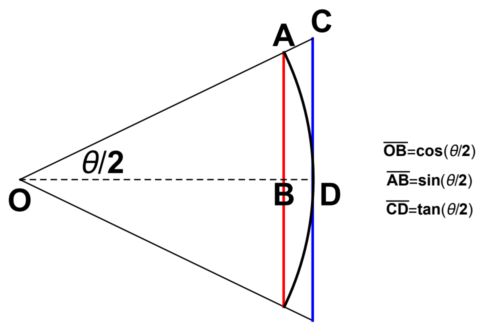
$$\ell' = \frac{1}{\sqrt{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{2+\sqrt{3}})}} \text{ per } N = 24 \tag{1.14}$$

Moltiplicando la lunghezza dei lati per il loro numero, abbiamo i risultati approssimati

$$M_3 = 5.20, M_6 = 6, M_{12} = 6.21, M_{24} = 6.27 \tag{1.15}$$

[5] Propongo due quiz su questo numero, ovvero di mostrare che $1/\sqrt{2+\sqrt{3}}$ è uguale a $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ (facile) e a $(\sqrt{6}-\sqrt{2})/2$ (buffo).

Figura 1.4: *Arco di cerchio di raggio unitario ed ampiezza angolare θ, e lati dei due poligoni regolari inscritto (in rosso) e circoscritto (in blu). In tratteggio, la bisettrice dell'angolo. La relazione tra i segmenti e le funzioni trigonometriche è richiamata a destra.*



L'ultimo numero si avvicina al risultato che conosciamo, 6.28, ma vorrei notare che Archimede procedette ancora di due passi in avanti - ovvero, usò un poligono di 96 lati - e stimò una approssimazione di pi greco parecchio più precisa di queste.[6] Noi ci fermiamo qui e proviamo a vedere come si potrebbe procedere usando uno strumento matematico che si studia a scuola.

1.2 Usiamo la trigonometria

Cominciamo ricordando che l'angolo del poligono regolare con N lati è dato semplicemente da

$$\theta = \frac{2\pi}{N} \tag{1.16}$$

[6]Come calcolare le radici quadrate di n? Si parte da un valore iniziale $s_1 = s$, e si migliora la stima applicando ripetutamente la seguente procedura: $s_{i+1} = 1 + \frac{n-1}{s_i+1}$, basata sull'identità $\sqrt{n} = 1 + (\sqrt{n} - 1)\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+1} = 1 + \frac{n-1}{\sqrt{n}+1}$. Nel caso $n = 3$, partendo da $s = 1$ si incontrano le frazioni usate da Archimede per stimare $\sqrt{n}$.

Dalla Fig. 1.4, usando le definizioni delle funzioni ‘seno’ e ‘tangente’ leggiamo immediatamente la relazione tra angolo e lato del poligono regolare inscritto e circoscritto

$$\ell_{\text{iscr.}} = 2\sin(\theta/2), \quad \ell_{\text{circ.}} = 2\tan(\theta/2) \tag{1.17}$$

e da qui troviamo

$$M_N = N\ell_{\text{iscr.}} = N\,2\sin\frac{\pi}{N}, \quad P_N = N\ell_{\text{circ.}} = N\,2\tan\frac{\pi}{N} \tag{1.18}$$

(vedi appendice A per le notazioni). Abbiamo già stimato i perimetri per $N=3$ ed $N=4$, e poiché vogliamo raddoppiare il numero di lati, stiamo cercando di stimare

$$M_{2N} = 2N\,2\sin\frac{\pi}{2N}, \quad P_{2N} = 2N\,2\tan\frac{\pi}{2N} \tag{1.19}$$

Dobbiamo usare allora le formule per dimezzare e raddoppiare gli angoli,[7] che possiamo scrivere così

$$2\sin(\theta/2) = \frac{\sin\theta}{\cos(\theta/2)} = \sin\theta\times\sqrt{\frac{2}{1+\cos\theta}} \tag{1.20}$$

$$2\tan(\theta/2) = \frac{\sin\theta}{\cos^2(\theta/2)} = \tan\theta\times\frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta} \tag{1.21}$$

Da qui concludiamo che le eq. 1.19 possono essere riscritte come segue:

$$M_{2N} = M_N\sqrt{\frac{2}{1+\cos\theta}}, \quad P_{2N} = P_N\frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta} \tag{1.22}$$

[7] Parlo di $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ e anche $\cos^2\theta/2 = (1+\cos\theta)/2$ e varianti, ben note dagli studi scolastici. Suggerisco ai più curiosi di ragionare sulla parentela della prossima formula e l’equazione 1.9. Si confronti con l’appendice A.

e dalla condizione $\cos\theta < 1$ è facile convincersi che $M_{2N} > M_N$ mentre $P_{2N} < P_N$. Quindi, conoscendo i valori a destra della equazione troviamo i nuovi; poi possiamo ripartire. La procedura in dettaglio è questa:

1. Iniziamo da un certo valore di N (p.e., $N = 3$) e consideriamo $\theta = \pi/N$. Supponiamo di conoscere i due perimetri M_N ed P_N e $\cos(\pi/N)$ per questo valore iniziale di N.

2. Calcoliamo i due perimetri M_{2N} ed P_{2N} con le formule appena mostrate.

3. Siccome conosciamo già il valore di $\cos\theta$, possiamo trovare
$$\cos(\theta/2) = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \tag{1.23}$$
e quindi ricominciare da capo, rimpiazzando N con $2N$, θ con $\theta/2$.

Vediamo che succede partendo da $N = 3$. Ripetendo 5 volte la procedura fino ad arrivare a 96 lati troviamo $M_{96} = 6.2821$ e $P_{96} = 6.2854$. Ricordando la definizione
$$M_N < C = 2\pi < P_N \tag{1.24}$$
e dividendo per due tutti i termini di questa equazione, troviamo
$$3.1410 < \pi < 3.1427 \tag{1.25}$$
Archimede esibì la stima
$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7} \tag{1.26}$$
che in effetti si approssima così
$$3.1409 < \pi < 3.1429 \tag{1.27}$$
e, come vediamo, va perfettamente d'accordo con la precedente.

lati poligono	poligono inscritto	poligono intermedio	poligono circoscritto
6	-1.4×10^{-1}	1.3×10^{-2}	3.2×10^{-1}
12	-3.6×10^{-2}	7.6×10^{-4}	7.4×10^{-2}
24	-9.0×10^{-3}	4.6×10^{-5}	1.8×10^{-2}
48	-2.2×10^{-3}	2.9×10^{-6}	4.5×10^{-3}
96	-5.6×10^{-4}	1.8×10^{-7}	1.1×10^{-3}

Tabella 1.1: *La seconda, terza e quarta colonna mostrano le differenze tra $M_N/2$, $I_N/2$ e $P_N/2$ con il numero pi greco, all'aumentare del numero di lati, dato nella prima colonna.*

1.3 Possiamo fare di meglio?

Abbiamo visto che la formula del semiperimetro del poligono inscritto, $M_N/2 = N \times \sin(\pi/N)$, sottostima π mentre invece quella del semiperimetro del poligono circoscritto, $P_N/2 = N \times \tan(\pi/N)$ soprastima π. Iniziamo a riscriverle così:

$$\sin(\pi/N) < \pi/N < \tan(\pi/N) \tag{1.28}$$

Tenendo a mente i poligoni su cui abbiamo ragionato, si intuisce che sarebbe meglio qualcosa di più grande del seno e qualcosa di più piccolo della tangente. Detto altrimenti, prendendo un poligono di dimensioni intermedie, possiamo avvicinarci meglio alla stima della circonferenza. Una formula che funziona abbastanza bene venne introdotta da Snell nel diciassettesimo secolo su base semiempirica. Essa considera un poligono con dimensioni corrispondenti alla media pesata di M_N e P_N, 2 parti del primo più una parte del secondo,

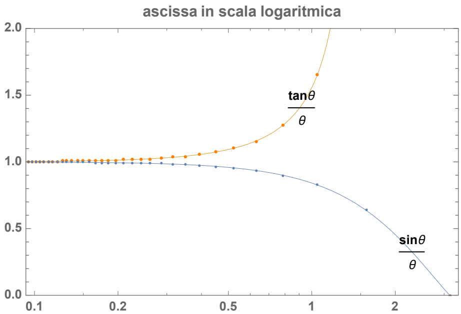


Figura 1.5: *Rapporti tra seno ed arco e tra tangente ed arco. In questa figura l'arco è indicato con il simbolo θ. I punti individuano i valori $\theta = \pi/N$ con $N = 1,2,3...$ Per potere apprezzare il modo in cui si infittiscono i punti, l'ascissa è in scala logaritmica.*

ovvero

$$I_N = 2N \times \left(\frac{2}{3} \sin(\pi/N) + \frac{1}{3} \tan(\pi/N) \right) \tag{1.29}$$

In effetti la Tab. 1.1 ci mostra che le $M_N/2$, $I_N/2$ e $P_N/2$ si avvicinano tutti a π quando il numero di lati N aumenta, ma nel caso di I_N, le differenze sono *molto più piccole*. Insomma questa stima è migliore e bastano solo 24 lati per avere una stima superiore a quella di Archimede,[8] come si vede dalla Tab. 1.1! Ma perchè questo metodo funziona?

1.3.1 Vari modi di diventare piccoli

Da un punto di vista dei poligoni, il motivo della sottostima e della soprastima è piuttosto evidente, ma adesso vorremmo capire fino in fondo la cosa anche nei termini della trigonometria. Iniziando a

[8] La stima in Eq. 1.26 può essere migliorata scrivendo $3 + 1/7 - 1/791$, che soprastima pi greco di solo 2.7×10^{-7}. Ci si può arrivare col ragionamento, ma la matematica che c'è dietro è abbastanza impegnativa.

porre $x = \pi/N$, abbiamo

$$\sin(x) < x < \tan x \text{ per } x = \frac{\pi}{N} \tag{1.30}$$

Guardiamo attentamente la Fig. 1.4. Ponendo $x = \theta/2$, vediamo che $\sin x = \overline{\mathrm{AB}}$ e $\tan x = \overline{\mathrm{CD}}$; e x non è altro che la lunghezza dell'arco sotteso e che va da A fino a D. Quindi questa relazione dice che l'arco è sempre più grande del seno e più piccolo della tangente; ed inoltre (come sappiamo dal considerare i poligoni) quando l'arco diventa piccolo le tre grandezze si avvicinano fino a coincidere in pratica. A scuola, nei corsi di analisi, questa proprietà viene spesso formulata come *limite notevole* del rapporto di due funzioni

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ e naturalmente} \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \tag{1.31}$$

Per fissare le idee è utile considerare il grafico di questi due rapporti, mostrato in Fig. 1.5.

La domanda allora diventa: se la funzione seno è un po' troppo piccola rispetto all'angolo (ovvero all'arco, siccome stiamo usando i radianti), e la funzione tangente è un po' troppo grande, quale è la funzione ottimale? Per rispondere vogliamo capire come si comportano queste funzioni quando l'arco diventa sempre più piccolo. Per farlo usiamo di nuovo gli strumenti della trigonometria.

1.3.2 Come avvicinarsi meglio alla circonferenza

Partiamo dalle stime, valide quando x si avvicina a zero

$$\textbf{primo ordine:} \quad \cos x \approx 1 \text{ e } \sin x \approx x \tag{1.32}$$

e vediamo come le possiamo rendere più precise. Il coseno sarà un po' inferiore a 1; inoltre, dalle considerazioni di geometria illustrate in Fig. 1.6 si vede che $1-\cos\theta$ è molto più piccolo di $\sin\theta$, specie quando l'angolo θ decresce sino a zero (questo segue dal notare che $\overline{\mathrm{HX}}:\overline{\mathrm{PH}} = \overline{\mathrm{OX}}:\overline{\mathrm{OQ}}$).

Pertanto, considerando le stime iniziali, supporremmo che $(1-\cos x)/\sin x \approx (1-\cos x)/x$ diventi sempre più piccolo man mano che x decresce, e possiamo immaginare che questo rapporto sia proporzionale alla lunghezza dell'arco x, ovvero, che lo possiamo stimare come $\approx ax$, dove a è una costante per il momento ignota. Poniamo allora

$$\cos x \approx 1 - ax^2 \tag{1.33}$$

e per calcolare $a>0$, ricorriamo alla formula per gli angoli doppi (che discutiamo anche in appendice A)

$$\begin{aligned}\cos 2x &\approx 1 - 4ax^2 \qquad (1.34)\\ &= \cos^2 x - \sin^2 x\\ &\approx (1-ax^2)^2 - x^2\\ &\approx 1-(2a+1)x^2\end{aligned}$$

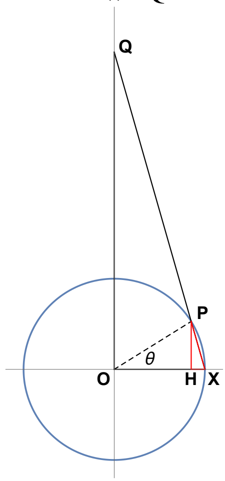


Figura 1.6: *Se θ è piccolo,* $\overline{\mathrm{HX}} \ll \overline{\mathrm{PH}}$ *siccome* $\overline{\mathrm{OX}} = 1 \ll \overline{\mathrm{OQ}}$.

dove ho scartato i termini più piccoli di quello quadratico. Questa condizione fissa $a = 1/2$. Allora insistiamo e poniamo

$$\sin x \approx x(1-ax^2) \tag{1.35}$$

dove a è una nuova incognita positiva, che descrive il fatto che $\sin x < x$, e che determiniamo nello stesso modo (vedi ancora appendice A)

$$\begin{aligned}\sin 2x \approx 2x(1-4ax^2) &= 2\cos x \sin x \\ &\approx 2x(1-x^2/2)(1-ax^2) \\ &\approx 2x(1-x^2(a+1/2))\end{aligned} \tag{1.36}$$

che ci dà $a = 1/6$. Possiamo continuare nello stesso modo e determinare i termini successivi, ma a noi basterà fermarci a questo punto:[9]

$$\textbf{secondo ordine:} \quad \cos x \approx 1 - x^2/2 \text{ e } \sin x \approx x(1-x^2/6) \tag{1.37}$$

dove il segno $\approx$ significa: c'è un resto, ma è più piccolo dei termini che esibiamo. Infine stimiamo

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \approx x\frac{1-x^2/6}{1-x^2/2} \tag{1.38}$$

Per semplificare la formula notiamo che $1/(1-x^2/2) \approx (1+x^2/2)$, di cui ci convinciamo facilmente prendendo la differenza tra i due termini. Allora

$$\tan x \approx x(1-x^2/6)(1+x^2/2) \approx x(1+x^2/3) \tag{1.39}$$

Quindi concludiamo che x è più piccolo di $\tan x$ a causa di un fattore cubico in x ed è più grande di $\sin x$ a causa di un fattore cubico in x (di coefficiente diverso, ma sempre cubico).

Siamo pronti a capire la scelta dei pesi di Snell. Infatti ci basta calcolare

$$\frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\tan x \approx \frac{x}{3}\left(2(1-x^2/6)+(1+x^2/3)\right) \approx x \tag{1.40}$$

[9] Chi volesse capire ancora meglio il metodo è invitato 1) a verificar cosa succede alla condizione $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; 2) a migliorar l'equazione 1.37 calcolando il **terzo ordine**, ovvero i coefficienti dei termini proporzionali a x^4.

L'ultima uguaglianza sancisce che la differenza tra l'arco x e l'espressione trigonometrica $2/3\sin x + 1/3\tan x$ è più piccola di un fattore cubico, e tutto ci porta a credere che sia una quinta potenza di x (che pure non abbiamo determinato). Detto in parole povere, questa scelta dei pesi ci ha permesso di 'compensare' il difetto di $\sin x$ e l'eccesso di $\tan x$, e di trovare una funzione che si avvicina di più ad x quando il lato del poligono diventa piccolo. È la ragione per cui, come constatiamo dalla Tab. 1.1, questa funzione ci consente di calcolare pi greco con maggiore precisione.[10]

1.4 Qualche annotazione divertente per (non) concludere

Concluderei aggiungendo un po' di discussione sulla definizione stessa di pi greco, quella data proprio all'inizio. (Il lettore non interessato ad una discussione critica o a una introduzione alle superfici curve è invitato a passare direttamente al prossimo capitolo.)

Immaginiamo di vivere sopra una sfera di raggio R molto grande e di scegliere un punto sulla sfera. Consideriamo una certa distanza r dal punto, il segmento circolare rosso nella Fig. 1.7 di estremi A e B, e tracciamo una circonferenza di raggio r. Dalla stessa figura vediamo che l'angolo sotteso dal raggio r vale $\theta = r/R$; pertanto, notando che $\overline{\mathrm{CB}} = R\sin\theta$, la circonferenza vale $C = 2\pi R\sin(r/R)$. Quindi il rapporto tra la circonferenza ed il suo diametro, $d = 2r$,

[10] Per fissare le idee, suggerisco di confrontare le funzioni $2/3\sin x + 1/3\tan x$ e $4/3\sin x - 1/6\sin 2x$. Quale delle due si avvicina di più all'arco x, quando l'arco stesso diventa piccolo? Verificare la risposta confrontando i valori numerici di $2/3M_6 + 1/3P_6$ e $4/3M_6 - 1/6M_3$ con quello di 2π.

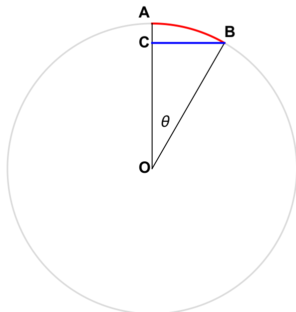
vale

$$\frac{C}{2r} = \pi \frac{\sin(r/R)}{r/R} < \pi \tag{1.41}$$

Il risultato *non è* pi greco:[11] cosa è andato storto?

Beh, avevamo dato per scontato che tutto il ragionamento riguardasse il piano e non una sfera: è il contesto ad essere storto - o meglio, curvo. Ma questo ci dà modo di definire cosa sia una superficie curva senza necessitare di altro che di misure molto precise! Cominciamo ad applicare l'equazione 1.37 per valutare di quanto ci allontaniamo

Figura 1.7: *Una sfera in sezione, vista di profilo.*



$$\begin{aligned} \frac{C}{2\pi r} - 1 &= \frac{\sin(r/R)}{r/R} - 1 \\ &\approx \left(1 - \frac{(r/R)^2}{6}\right) - 1 = -\frac{(r/R)^2}{6} \end{aligned} \tag{1.42}$$

Dunque, la differenza tra la circonferenza misurata e quella che misureremmo se vivessimo su una superficie piana - una quantità che potremmo chiamare *difetto di circonferenza* - divisa per l'area della circonferenza di raggio r, ci permette di misurare il raggio della sfera su cui ci troviamo:

$$\frac{\text{difetto di circonferenza}}{\text{area cerchio}} \approx \frac{C/(2\pi r) - 1}{\pi r^2} \approx -\frac{1}{6\pi R^2} \tag{1.43}$$

[11] Anche l'area del cerchio non vale esattamente πr^2; lascio ai curiosi il compito di convincersene.

Questo tipo di considerazioni ha avuto enormi sviluppi in tempi recenti, grazie all'impulso dei matematici Gauss, Riemann e di molti altri. Però va ricordato che anche i matematici greci, Menelao di Alessandria in particolare, si erano interessati della 'sfera celeste' e avevano un po' studiato cose del genere... in fondo sapevano bene che il pianeta che ci ospita è (approssimativamente) una sfera! E tra le altre cose, s'erano accorti che sulla sfera ha senso considerare un poligono di due lati, detto *biangolo* - riuscite mica ad immaginarlo?

E così dopo avere mantenuto la promessa di accennare anche a cose curiose, mi sembra il caso di concludere questa introduzione al pi greco e di passare al prossimo argomento.

(O magari di lasciare un lettore particolarmente curioso ai suoi approfondimenti, siccome il campo aperto dalla matematica ellenistica è vastissimo e pieno di argomenti stimolanti. Per iniziare, proverei a portare avanti qualche calcolo da soli per mettere alla prova la matematica appresa a scuola; e magari sfoglierei [3], cercando di non farsi confondere sulla enorme massa di informazioni ma piuttosto concentrandosi su qualche punto di interesse; a chi fosse davvero interessato caldeggio fortemente di reperire lo strepitoso libro di Delahaye [4]; per le cose accennate proprio in questa ultima sezione,[12] invece, raccomando di leggere [5].)

[12] Un buffo esercizio su queste ultme cose prende spunto dall'interpretazione letterale di un antico brano: *"Fece un bacino di metallo fuso di dieci cubiti da un orlo all'altro, rotondo; la sua altezza era di cinque cubiti e la sua circonferenza di trenta cubiti"*. Quanto avrebbe dovuto essere lungo un cubito, se la circonferenza di quel recipiente rotondo valeva davvero $C = 6r$? Si usi la formula 1.43 assumendo che il raggio della terra valga $R = 6371$ km, e si confronti con l'opinione degli storici, che un cubito sia lungo circa 0.5 m.

Capitolo 2

Introduzione al numero *i* ed ai numeri complessi

In questo secondo capitolo, ci familizzeremo con certi nuovi concetti dell'algebra, considerati per la prima volta dai matematici nel sedicesimo secolo, e chiariti in particolare dall'italiano Bombelli. Il problema da cui si partì era quello di capire il significato delle soluzioni delle equazioni cubiche. Esse erano state ottenute tramite mezzi algebrici (in particolare da Cardano e da Vieta) ma che in certi casi prendevano forme incomprensibili.[1] Si arrivò a superare questa situazione introducendo un nuovo tipo di numeri, detti nu-

[1]A testimonianza di quanto fosse grande all'inizio il disagio, ci limitiamo a riportare cosa diceva Cardano nel suo celebre trattato "Ars Magna": *Eppure, benché implichi una serie di torture mentali, ciò è fattibile grazie ad alcuni numeri sofistici*. Era questo il termine originario per quelli che oggi chiamiamo numeri complessi: numeri sofistici!

meri complessi o immaginari,[2] che da allora ci accompagnano nella pratica matematica quotidiana.

Il fatto è che abbiamo in seguito capito che questo nuovo tipo di numeri sono importanti *per quasi ogni ramo della scienza* (a qualcuno sembrerà una esagerazione ma non lo è). Questa loro rilevanza va molto oltre quella del problema che ce li ha fatti scoprire, ma, nelle denominazioni che usiamo per parlare di essi, continuiamo a subire gli effetti di una origine un po' sofferta. Vedremo proprio alla fine di questo discorso che, partendo da ben precise posizioni intellettuali, ed usando un linguaggio appropriato, diventerebbe facilissimo diradare molta dell'oscurità che offusca questi importanti argomenti.

Sull'insegnamento di questi concetti: Ogni tanto - e per fortuna sempre più spesso - si parla di questi argomenti a scuola, di solito partendo da considerazioni del tipo: *siccome non troviamo nessun numero che risolve l'equazione $x^2 = -1$, ce lo inventiamo (o se si vuole, lo definiamo), ed introduciamo una speciale quantità chiamata $\sqrt{-1}$, che obbedisce la regola $(\sqrt{-1})^2 = -1$.* Non c'è niente di sbagliato a far così, ma bisogna ammettere che partire proprio in questo modo possa risultare fastidioso, in quanto ci porta inevitabilmente a chiederci: e perchè mai dovremmo farlo? Seguire il travaglio delle idee è, per contro, più dispendioso, ma consente di rendersi conto fino a che punto certe evoluzioni sono cogenti o addirittura necessarie. Per questo proveremo a procedere per questa strada, che ci offre l'indubbia soddisfazione di accostarci ad alcune delle più brillanti menti dell'umanità e anche la scusa per parlare di logica della scoperta scientifica.

[2] Esamineremo e discuteremo in seguito l'origine di queste denominazioni.

Ai fini della nostra discussione, continueremo a prendere vantaggio del tipo di matematica che si incontra nella scuola superiore, ed in particolare, ci affideremo agli strumenti dell'algebra elementare, della trigonometria e della geometria analitica (o cartesiana). Ad onor del vero, va riconosciuto che il percorso storico fu ancora più accidentato di quello che noi seguiremo, in quanto qualcuno di questi strumenti - p.e., l'algebra dei numeri negativi, in parte la trigonometria, ma anche le notazioni stesse - venne sviluppato completamente solo in tempi successivi. Noi però disporremo liberamente di questi concetti: andare a scuola ogni tanto aiuta :)

2.1 Le equazioni cubiche

Ogni equazione cubica può essere portata in una forma standard come la seguente

$$x^3 = 3Px + 2Q \tag{2.1}$$

(suggerisco agli interessati di convincersene da soli, considerando il caso generale, e definendo opportunamente i cofficienti dopo aver introdotto una opportuna traslazione della variabile incognita: $X = x + S$; alla bisogna si può anche consultare l'appendice B). Risolvere questa equazione significa trovare quei valori x, che per valori prefissati di P e Q, soddisfano l'eguaglianza. Per esempio, se $Q = 2$ e $P = 5$, ci si convince facilmente che $x = 4$ è una soluzione.

Provando ad esaminare questa equazione con le tecniche che si studiano a scuola, possiamo pensare ad essa come all'intersezione di due curve nel piano cartesiano. Quella a sinistra dell'uguaglianza è la 'parabola cubica' $y = x^3$, che è una funzione sempre crescente (si veda la Fig. 2.1); quella a destra è una retta $y = 3Px + 2Q$, che cresce o decresce a seconda del valore di P. Dunque, se $P \leq 0$ la retta decresce e c'è solo un punto di intersezione.

Se invece $P > 0$ (ovvero se la retta cresce) la discussione è più articolata. Iniziamo dal caso $Q = 0$, quando la retta passa per l'origine: ci sono tre punti di intersezione, siccome la retta e la parabola cubica si incontrano nell'origine e in due altri punti. Lo stesso avviene se il valore dell'intercetta Q sull'asse delle ordinate è abbastanza piccolo, come viene illustrato per il caso $P = 1$ nella Fig. 2.1 (regione in grigio); se invece Q è grande c'è solo un punto di intersezione. Per la precisione, ci sono tre soluzioni quando vale la condizione $Q^2 < P^3$; invece se $Q^2 > P^3$ c'è solo una soluzione. (Per approfondire, si veda qui[3] oppure qui[4].)

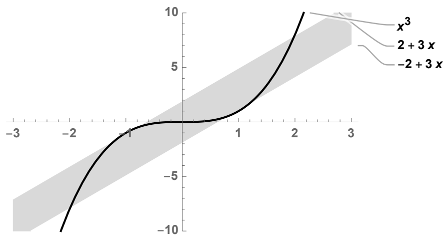


Figura 2.1: *Parabola cubica $y = x^3$ nel piano cartesiano e regione tra due rette tangenti ad essa, assumendo che valga $P = 1$ (vedi discussione nel testo).*

[3] Un approccio geometrico al significato della condizione $Q^2 < P^3$ richiede di conoscere il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola cubica $y = x^3$, che vale $y'(x) = 3x^2$; imponendo che esso coincida con il coefficiente $3P$ della retta $y = 3Px + 2Q$, otteniamo il punto di tangenza $x_* = \sqrt{P}$. Da qui scopriamo che la retta tangente ha $Q = Q_* = -P^{3/2}$. Quindi se $Q < Q_*$ c'è solo un punto di intersezione, mentre se $Q_* < Q < 0$ ce ne sono tre. Con un po' di innocente algebra si vedere che il primo caso corrisponde a $Q^2 - P^{3/2} > 0$ ed il secondo a $Q^2 - P^{3/2} < 0$.

[4] Un modo alternativo (algebrico-analitico) per capire come funzionano le cose è notare che quando $P > 0$ e nel caso $Q^2 = P^3$ possiamo porre $Q^2 = P^3 = R^6$,

Si noti che dalla discussione precedente risulta che c'è sempre una soluzione, e questo torna bene all'intuizione geometrica. Infatti, la retta e la parabola cubica sono entrambe curve continue; inoltre la retta è sicuramente sopra alla parabola cubica per valori molto negativi, ed è sicuramente sotto per valori molto positivi; dunque, da qualche parte si incontreranno di sicuro, esiste almeno in un punto di intersezione.

2.2 Un problema con le soluzioni delle equazioni cubiche

Ora però vorremmo parlare di una cosa che non sempre si discute a scuola: come calcoliamo le soluzioni dell'equazione cubica? Certe soluzioni erano state ottenute da algebristi italiani e francesi sin dal sedicesimo secolo. Gli interessati le troveranno discusse nella appendice B ma per la presente discussione ci basterà esibirle esplicitamente[5]

$$x = \sqrt[3]{Q+\Delta} + \frac{P}{\sqrt[3]{Q+\Delta}} \tag{2.2}$$

dove il "discriminante" vale

$$\Delta = \pm\sqrt[2]{Q^2 - P^3} \tag{2.3}$$

---

per riscrivere infine l'equazione come $(x-R)^2(x+2R) = 0$; convincersi a questo punto che, (i) in questo caso ci sono due soluzioni distinte, non 1 e non 3 (quindi questo è il caso di transizione tra 1 e 3 soluzioni); (ii) al variare di x intorno al punto $x = R$, la distanza da zero è particolarmente piccola (cosa che ci porta a dire che la soluzione $x = R$ è 'doppia').

[5] Se si dubita che le formule 2.2 e 2.3 forniscano delle soluzioni, si sostituisca la 2.2 nella equazione da risolvere 2.1 e si usino le regole note; p.e., $\Delta^2 = Q^2 - P^3 \Rightarrow P^3 = Q^2 - \Delta^2$, oppure, $x^3 = (y + P/y)^3 = y^3 + P^3/y^3 + 3Px$ dove abbiamo posto $y = \sqrt[3]{Q+\Delta}$.

Trovare anche una sola soluzione è un'ottima cosa. Infatti, quando sappiamo una soluzione possiamo ridurre l'equazione in una di grado inferiore, e la cubica si trasforma in una quadratica, che sappiamo risolvere. Per questo nel sedicesimo secolo si iniziava a credere che i matematici avessero risolto il problema delle equazioni cubiche.[6]

Ma mostriamo immediatamente che c'è un problema annidato nei dettagli della soluzione. Costruiamo una cubica con tre soluzioni prefissate, cioè:

$$(x-5)(x+1)(x+4)=0 \Leftrightarrow x^3 = 21x+20 \tag{2.4}$$

che si annulla in $x=5,\ -1$ e -4, semplicemente perché l'abbiamo costruita a bella posta! Questa cubica coincide con l'eq. 2.1 una volta che poniamo $P=7$ e $Q=10$. Vediamo allora cosa ci dice la soluzione mostrata in eq. 2.2

$$x=\sqrt[3]{10+\Delta}+\frac{7}{\sqrt[3]{10+\Delta}} \text{ dove } \Delta=\pm\sqrt{10^2-7^3}=\pm\sqrt{-243} \tag{2.5}$$

Il risultato non somiglia a nessuna delle tre soluzioni, della cui esistenza siamo pur certi. E poi, cosa significa? La radice quadrata di una quantità negativa?! Non sappiamo cosa farne...

2.3 Un'estensione del concetto di numero

All'epoca, il timore era che l'algebra avesse messo fuori strada i matematici. Ma l'approccio vincente fu proprio quello contrario,

[6]Solo per i curiosi: c'è un modo breve ed elegante per trovare questa soluzione ed è descritto in dettaglio in appendice B.

ovvero di ritenere che le manipolazioni algebriche stavano *suggerendo* di tentare qualcosa di nuovo. Insomma si dava all'algebra un ruolo simile a quello di un oracolo, che ci guida oltre i nostri stessi limiti! Fu questo il punto di vista adottato da Bombelli.[7]

Andiamo allora subito alla radice del problema (è il caso di dirlo) e introduciamo una notazione tutta speciale per l'oggetto che ci turba

$$i = \sqrt{-1}, \text{ accettando la regola } i^2 = -1 \tag{2.6}$$

Proviamo insomma a ragionare di robe simili a quelle che compaiono in certe soluzioni delle equazioni cubiche (p.e., in eq. 2.5) che semplificando al massimo scriveremo così

$$\mathbf{z} = x + i\, y \tag{2.7}$$

dove x e y sono reali. Detto in altre parole, proviamo a vedere che succede se applichiamo le manipolazioni algebriche anche alle combinazioni di numeri reali e di questo strano oggetto *i che l'algebra ci obbliga a considerare.* Il numero x viene detta parte reale di $\mathbf{z}$, quello iy parte immaginaria (è solo il nome tradizionale, che ci deriva da Cartesio e come argomenteremo in seguito, non è un nome particolarmente ben scelto).

Considerando quanto sono utili somma e moltiplicazione, ci chiediamo se la somma ed il prodotto di due robe di questo tipo diano ancora una roba dello stesso genere. Per verificarlo, prendiamone un paio, $\mathbf{z}_1 = x_1 + i\ y_1$ e $\mathbf{z}_2 = x_2 + i\ y_2$, e usando la proprietà commutativa ed associativa della somma e del prodotto per i, troviamo

$$\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 = (x_1 + i\, y_1) + (x_2 + i\, y_2) = (x_1 + x_2) + i\ (y_1 + y_2) \tag{2.8}$$

[7] Le argomentazioni e le parole che usò Bombelli possono essere lette, p.e., in questa interessante tesi di laurea [6].

Procedendo nello stesso modo, troviamo per il prodotto

$$\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2 = (x_1 + i\, y_1)(x_2 + i\, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + y_1 x_2) \quad (2.9)$$

A parte i dettagli forse un po' inaspettati del secondo risultato, concludiamo che si può operare con somme e prodotti e trovare ancora robe dello stesso tipo. *Pertanto, anche le nuove combinazioni di numeri reali possono essere chiamate, a ragione, numeri.*

Una operazione generale è quella dello scambio di i in $-i$, ovvero come si usa dire dell'associazione di un numero con il suo *coniugato*, che si indica con il simbolo convenzionale

$$\mathbf{z} = x + iy \text{ è coniugato a } \bar{\mathbf{z}} = x - iy \quad (2.10)$$

Questa operazione somiglia un po' all'associare un numero reale con il suo opposto, ovvero, $+x$ associato a $-x$.

I nomi tradizionali con cui si indicano queste quantità sono abbastanza curiosi. Il numero i vien detto unità *immaginaria,* denominazione che riecheggia dubbi residuali sulla natura di questo ente matematico. I numeri $\mathbf{z}$ son detti in modo altrettanto curioso *numeri complessi,* denominazione che sottolinea invece la necessità di manipolazioni algebriche più difficili di quelle a cui siamo abituati, e che spesso suona come un altolà a chi non è molto motivato (anche questo effetto non sembra del tutto auspicabile). Il numero i può essere considerato un caso particolare di "numero complesso", quello in cui la parte reale è nulla e quella immaginaria ha coefficiente $y = 1$.

Alla luce della storia successiva, sarebbe stato più giusto chiamare questi numeri numeri eleganti, mirabili, utilissimi ma ormai è andata così; per adesso impariamo ad usarli senza farci fuorviare dai nomi lasciati in eredità dalla storia della matematica. (Ne riparleremo però alla fine di questo percorso.)

2.4 Il piano complesso

Un'idea apparentemente semplice ma molto fruttifera fu quella di rappresentare i numeri complessi $\mathbf{z} = x + iy$ in un piano, dove l'asse delle ascisse rappresentasse i numeri reali x (ovvero il caso in cui $y = 0$) mentre l'asse delle ordinate quelli puramente immaginari (ovvero il caso in cui $x = 0$). Questo piano, detto naturalmente *piano complesso,* viene spesso chiamato piano di Argand oppure di Argand-Gauss dai nomi di due matematici che lo investigarono a fondo, anche se era stato studiato precedentemente dal matematico Wessel. (Come sopra promesso, ritorneremo sulle considerazioni storiche alla fine di questo capitolo.)

Il valore di una rappresentazione visuale esplicita è legata ad almeno tre considerazioni generali: 1) prima di tutto, siamo abituati a ragionare in simili termini dalla geometria euclidea; 2) inoltre, un passo del genere 'risolve' in un certo senso il problema psicologico dell'esistenza di numeri siffatti; 3) infine, la mente umana è particolarmente abile nella visione, come argomentato nel bel saggio [7]: quindi, un ausilio di questo tipo arricchisce e potenzia il linguaggio dell'algebra, che è alla base delle considerazioni sopra esposte.

Si intuisce facilmente che l'operazione di somma tra due numeri complessi corrisponda a due movimenti traslatori del punto a partire dall'origine, per un ammontare quantificato dalle loro coordinate.

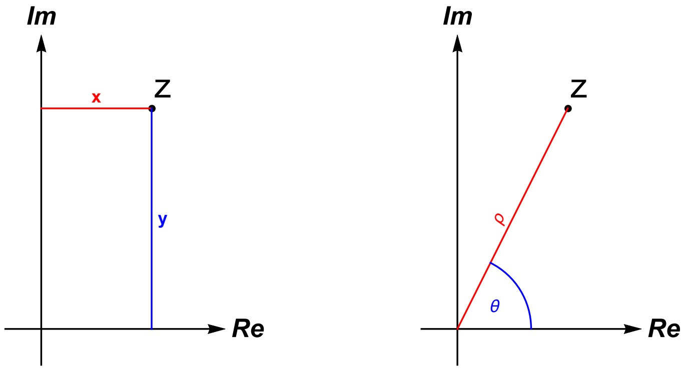


Figura 2.2: *Due modi per individuare un numero* $\mathbf{z}$ *sul piano complesso: tramite le sue coordinate cartesiane* x *ed* y *(sinistra); tramite le sue coordinate polari* ρ *e* θ *(destra). Naturalmente, si può passare dall'una all'altra rappresentazione usando relazioni come* $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = \rho\cos\theta$, *ecc.*

Quello che invece è sorprendente è il significato dell'operazione di moltiplicazione.

Per capirlo, procederemo considerando un secondo modo per identificare i numeri complessi, che ci permetterà di capire meglio cosa succede quando si effettua una moltiplicazione tra di essi.

2.4.1 Forma polare

Ogni numero complesso corrisponde ad un punto nel piano. Dunque, c'è anche un altro modo per individuare univocamente un numero del genere: ci basterà assegnare la distanza del punto dall'origine e l'angolo tra la retta che congiunge l'origine al punto e l'asse delle ascisse.

Si veda la Fig. 2.2 per visualizzare questo metodo. Pertanto rappresenteremo il numero complesso generico in coordinate polari nel modo che segue

$$\mathbf{z} = x + i\,y = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{2.11}$$

dove la distanza

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \tag{2.12}$$

viene detta *modulo* (o valore assoluto) del numero, mentre l'*angolo* con l'asse delle ascisse è dato da

$$\cos\theta = x/\rho \text{ e } \sin\theta = y/\rho \tag{2.13}$$

Non è particolarmente difficile (ma è importante) riuscire ad invertire queste relazioni per trovare la x e la y, una volta noti il modulo ρ e l'angolo θ; lasceremo che il lettore non ancora pratico si curi di consolidare questo importante obiettivo.

2.4.2 Ancora sul prodotto di due numeri complessi

Prendiamo adesso il prodotto di due numeri complessi, che indicheremo così

$$\mathbf{z}_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \text{ e } \mathbf{z}_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \tag{2.14}$$

Il modulo del prodotto non è altro che il prodotto dei moduli $\rho_1\rho_2$. E l'angolo? Vediamo

$$\begin{aligned}&(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\ &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\end{aligned} \tag{2.15}$$

dunque usando le ben note formule di somma della trigonometria, abbiamo

$$\begin{aligned}&(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\&= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\end{aligned} \tag{2.16}$$

Un risultato notevole che viene enunciato semplicemente così:

l'angolo del prodotto di due numeri complessi è la somma dei loro angoli.

Chi arriva a questo risultato per via algebrica, ovvero lungo il percorso che abbiamo seguito, resta di solito piuttosto colpito da un risultato tanto semplice e apparentemente profondo; vedremo poi che ne ha ben donde.

2.5 Applicazioni

2.5.1 Formula di ripartizione degli angoli

Dal risultato appena esposto segue immediatamente la formula detta di de Moivre,[8]

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \tag{2.17}$$

che possiamo scrivere anche alla rovescia. Cambiando il nome delle variabili da θ a θ/n, otteniamo

$$\cos\theta + i\sin\theta = \left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)^n \tag{2.18}$$

[8] A prima vista, uno sarebbe tentato di sottovalutare questo risultato. Faccio notare però che dimostrare separatamente le formule per $\cos(n\theta)$ e per $\sin(n\theta)$ senza ricorrere ai numeri complessi è possibile ma anche piuttosto faticoso, come mostrato nell'appendice D ad edificazione degli scettici.

Questa formula ha il seguente significato geometrico: per effettuare una rotazione di un angolo θ, è possibile ripartire l'angolo stesso in n rotazioni più piccole ed effettuarle in sequenza - che è una proprietà molto evidente a chiunque abbia riflettuto un attimo davanti ad un orologio a lancette.

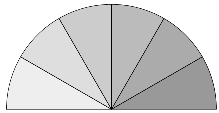


Figura 2.3: *Angolo piatto ripartito in sei parti uguali.*

Esplicitamo queste considerazioni in un caso specifico per chiarirci le idee quanto meglio possibile. Consideriamo il caso della ripartizione mostrata nella Fig. 2.3, che corrisponde ai valori numerici $\theta = \pi$ ed $n = 6$. Sostituendo questi valori nella equazione 2.18, a sinistra abbiamo semplicemente -1, mentre a destra abbiamo $\theta/n = \pi/6$, cioè un angolo di 30 gradi, di cui conosciamo sia il coseno che il seno. Questo ci porta all'identità:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^6 = -1 \tag{2.19}$$

che invito i lettori a verificare da soli, svolgendo le moltiplicazioni.

2.5.2 Radici dei numeri complessi

Dalla formula 2.18 possiamo ottenere subito una delle radici di un numero complesso

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\mathbf{z}} &= \sqrt[n]{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)} \qquad (2.20) \\ &= \rho^{1/n}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right) \end{aligned}$$

Per ottenerle tutte, concentriamoci sulle radici dell'unità. Notiamo che per ogni valore m intero ed inferiore ad n vale

$$\left(\cos\frac{2\pi m}{n} + i\sin\frac{2\pi m}{n}\right)^n = 1 \tag{2.21}$$

infatti, usando la formula di ripartizione il risultato del membro di destra è proprio $\cos(2\pi m) + i\sin(2\pi m) = 1$. In altre parole, abbiamo appena visto l'esistenza di n radici dell'unità:

$$\sqrt[n]{+1} = \cos\frac{2\pi m}{n} + i\sin\frac{2\pi m}{n} \text{ per } m = 0, 1, 2 \ldots n-1 \tag{2.22}$$

Si veda la Fig. 2.4 per una loro rappresentazione grafica in due casi particolari, $n = 3$ ed $n = 8$.[9]

Da questa osservazione segue che, qualsiasi numero complesso diverso da zero ha proprio n radici n-sime distinte all'interno dei numeri complessi, che possiamo scrivere semplicemente così:

$$\sqrt[n]{\mathbf{z}} = \rho^{1/n}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi m}{n} + i\sin\frac{2\pi m}{n}\right) \tag{2.23}$$
$$\text{per } m = 0, 1, 2 \ldots n-1$$

Questo permette di intuire che i numeri complessi siano particolarmente utili nei problemi che comportano l'estrazione di radici. E così siamo pronti per ritornare al problema da cui siamo partiti, ovvero la soluzione delle equazioni cubiche, mostrando in che modo se ne viene fuori proprio grazie all'uso dei numeri complessi.

[9] Si raccomanda di calcolare quali sono i valori delle radici nei due casi mostrati in figura.

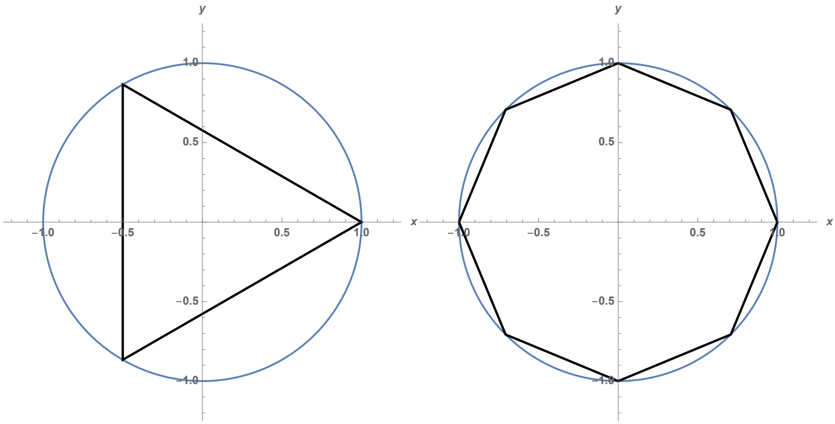


Figura 2.4: *Le radici dell'unità coincidono con i vertici di un poligono regolare nel piano complesso che parte dal punto $x = 1$ ed $y = 0$. Nelle due figure, mostriamo l'esempio delle radici cubiche ed ottave, che corrispondono al triangolo equilatero e all'ottagono.*

2.6 Un lieto fine per le equazioni cubiche

Possiamo finalmente tornare alle equazioni cubiche, da cui siamo partiti qualche pagina fa, e precisamente nelle sezioni 2.1 e 2.2. Consideriamo la soluzione mostrata nella equazione 2.2, che riformuliamo esplicitando la presenza di numeri complessi:

$$x = \sqrt[3]{Q + i\sqrt{P^3 - Q^2}} + \frac{P}{\sqrt[3]{Q + i\sqrt{P^3 - Q^2}}} \tag{2.24}$$

Concentrandosi sul caso $P > 0$, che era quello che ci infastidiva, portiamo il numero positivo P sotto il segno di radice cubica, e osservando che

$$P^3 = (Q + i\sqrt{P^3 - Q^2})(Q - i\sqrt{P^3 - Q^2}) \tag{2.25}$$

riscriviamo la soluzione come segue

$$x = \sqrt[3]{Q + i\sqrt{P^3 - Q^2}} + \sqrt[3]{Q - i\sqrt{P^3 - Q^2}} \tag{2.26}$$

Questa soluzione è ancora nella forma di una somma di due radici, che in generale sono complesse e non reali.

Notiamo però che i due radicandi sono identici a meno dello scambio di i in $-i$, ovvero usando la terminologia introdotta sopra, sono *coniugati*: $\mathbf{z} = x + iy$ è coniugato a $\bar{\mathbf{z}} = x - iy$. A questo punto, convinciamoci che il coniugato della radice di un numero complesso è la radice del numero coniugato - una affermazione che sembra uno scioglilingua - o meglio in formule $\mathbf{w}^n = \mathbf{z} \Rightarrow \bar{\mathbf{w}}^n = \bar{\mathbf{z}}$ (vedi eq. 2.10).

Dopo questo ragionamento (o teorema, non importa troppo la terminologia) arriviamo subito alla conclusione che le due radici cubiche appena mostrate, e che costituiscono la soluzione, hanno parti immaginarie uguali ed opposte. Dunque, anche nel caso in cui $P > 0$ e $P^3 > Q^2$, a dispetto delle apparenze, la soluzione è un numero reale.

Vorremmo adesso convincervene del tutto facendo calcoli specifici. Torniamo al nostro polinomio noto e alla sua soluzione, scritta esplicitamente in equazione 2.5 e riformuliamola utilizzando le nuove tecniche appena descritte

$$x = \sqrt[3]{10 + i\sqrt{243}} + \sqrt[3]{10 - i\sqrt{243}} \tag{2.27}$$

La possiamo esplicitare ulteriormente con i risultati della precedente sezione, in particolare, usando la forma polare dei numeri e la relazione

$$\sqrt[3]{\rho\ (\cos\theta + i\sin\theta)} = \rho^{1/3}(\cos\theta/3 + i\sin\theta/3) \tag{2.28}$$

Dalla eq. 2.27 si legge subito

$$\rho = \sqrt{10^2 + 243} = 7^{3/2} \Rightarrow \rho^{1/3} = \sqrt{7} \tag{2.29}$$

ed anche,

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{243}}{10} \Rightarrow \theta = 1.00042 \tag{2.30}$$

Allora, troviamo che

$$x = 2\cdot\rho^{1/3}\cdot\cos(\theta/3) = 2\cdot\sqrt{7}\cdot 0.944911 = 5 \tag{2.31}$$

è proprio una delle soluzioni che ci aspettavamo: insomma, il metodo funziona davvero! (E per i pignoli o i dubbiosi, vedere qui[10] o qui[11]; per fissare le idee, suggerisco un esercizio di controllo.[12])

A chi volesse sapere qualcosa di più sui numeri complessi, raccomando il libro divulgativo [8] e la pagina Wiki [9], che pure è un po' succinta; noi procederemo invece a chiarire alcuni aspetti concettuali piuttosto importanti, specie per chi si avvicina per la prima volta a questi concetti oppure per chi si trova ad insegnarli.

[10] Una dimostrazione che la relazione è esatta si basa sull'osservazione che il cubo di $(5+i\sqrt{3})/2$ è esattamente uguale a $10+\sqrt{-243}$.

[11] E chi non ci credesse ancora, può fare questa verifica: assumendo $\cos(\theta/3) = x/(2\rho^{1/3}) = 5/(2\sqrt{7})$ e usando le formule di triplicazione dei coseni dalla trigonometria, ne segue che $\cos\theta$ vale esattamente $10/\rho = 10/7^{3/2}$.

[12] Calcolare il valore ρ e l'angolo in gradi del numero $\sqrt[3]{4+i4\sqrt{3}}$ usando le stesse tecniche qua sopra illustrate.

2.7 La geografia dei numeri immaginari

Immagino che molti di coloro che si trovano ad usare frequentemente la cosiddetta 'unità immaginaria' e i cosiddetti 'numeri complessi' (o magari quelli che hanno letto fino a qui) potrebbero nutrire disagio verso tali denominazioni: sembrano concetti utili e trasparenti, non oscuri o di dubbio valore!

Un sentimento del genere, in verità, è condiviso da molti, inclusi dei grandi matematici. Per esempio, uno dei maggiori di tutti i tempi, Gauss, scriveva così a proposito a metà dell'ottocento

> "Che questo argomento [quello delle grandezze immaginarie] sia stato finora visto da un punto di vista sbagliato ed ammantato da misteriosa oscurità, deve essere attribuito in gran parte a una denominazione mal concepita. Se per esempio, $+1$, -1, $\sqrt{-1}$ fossero state chiamate **unità diretta, unità inversa e unità laterale,** invece di unità positiva, unità negativa e unità immaginaria (o qualche volta addirittura impossibile) tale oscurità non sarebbe stata neppure in discussione."
> *Theoria residiorum biquadraticorum, Commentatio secunda. Werke, Bd. 2.* Gauss, Goettingen (1863)

Peccato che sia stato proprio Gauss a proporre l'antipatica denominazione 'numeri complessi'!

Anche un matematico dei nostri giorni, molto attento ad una efficace esposizione della matematica, Steenrod, ha scelto proprio questo specifico argomento per illustrare le sue idee sulla didattica, ed ha mostrato come la denominazione alternativa 'numeri del piano' avrebbe evitato ogni disagio. Proponiamo un suo breve testo illustrativo a proposito, che Steenrod scrive immaginando di mettersi al posto di Gauss, mentre introduce i nuovi concetti [10]

> "Una importante scoperta riguarda [...] l'estensione del sistema ordinario dei numeri, *R*, che pensiamo come ai numeri che formano la retta, ad un sistema più grande che consiste nei numeri che formano un piano, denotati con *C*. I nuovi numeri sono detti **numeri del piano** in contrasto coi **numeri della retta**."
> *Come scrivere di matematica.* Steenrod, Halmos, Schiffer, Dieudonné, American Mathematical Society (1973)

In effetti un'ipotetica denominazione di questo tipo risolverebbe alla radice il problema messo a fuoco da Gauss.

Oltretutto, sarebbe anche un modo per ragionare proprio come fece chi introdusse per primo queste idee, ovvero il matematico e cartografo[13] Wessel, che nella introduzione del suo bel saggio sulla rappresentazione matematica delle direzioni, scriveva così [11]:

> "Baso la mia argomentazione su due proposizioni, che considero indiscutibili. La prima è: **un cambio di direzione** prodotto da operazioni algebriche dovrebbe essere *rappresentato* da un suo specifico simbolo. La seconda è: la direzione è un argomento di algebra solo nella misura in cui può essere *modificata* da operazioni algebriche.
>
> Ma la direzione non può essere modificata dalle operazioni note (almeno non secondo la spiegazione usuale)

[13]Si noterà che il nome *geografia* ha la radice *geo* (di origine greca) a comune con il nome *geometria*. Non è un caso che entrambe le discipline fiorirono proprio nella stessa civiltà: quella greca.

> se non per quanto riguarda l'inversione, che passa dal numero positivo a quello negativo, e viceversa. Allora, solo queste due direzioni sono indicate nel modo noto, e per tutte le altre direzioni il problema dovrebbe essere considerato irrisolvibile."
> *Sulla rappresentazione delle direzioni nell'analisi. Un tentativo applicato principalmente alla risoluzione dei poligoni sul piano e sulla sfera.* Wessel (1797)

Come si vede, Wessel parlava proprio delle stesse cose. Così, a titolo di sommario di questa sezione, sembra utile pensare al piano come ad una mappa geografica, e concepire i punti del piano proprio come avrebbe fatto Wessel.

Scelta una base di partenza (o punto di riferimento, l'origine insomma) ci sono evidentemente due modi di indicare il punto da raggiungere:

1. o si dice procedi a est di x metri e poi a nord di y metri (se x o y fossero negativi, diremmo procedi a ovest oppure a sud);

2. o si dice, punta in una certa direzione angolare θ, misurata a partire dall'est, e poi procedi di un certo numero di metri ρ.

Vedi anche la Fig. 2.5. Questi due modi ovviamente corrispondono perfettamente alle coordinate cartesiane e quelle polari, precedentemente introdotte ed illustrate nella Fig. 2.2.

Le operazioni[14] tra questi punti di arrivo, o numeri, sarebbero a questo punto piuttosto evidenti. La *somma* corrisponderebbe allo

[14]Chiamiamole pure operazioni algebriche, se si vuole; è un modo di onorare i matematici arabi che permisero alla matematica di sopravvivere e svilupparsi.

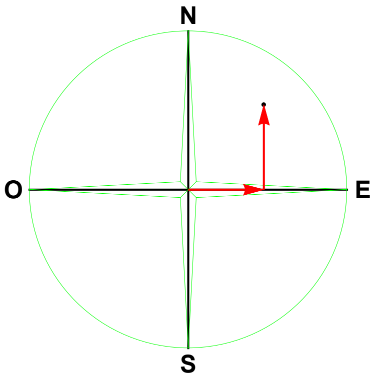


Figura 2.5: *Identificazione delle posizioni in una mappa secondo il punto di vista di un geografo.*

spostarsi in sequenza da una posizione all'altra, e potrebbe essere formulata con le seguenti semplici istruzioni

- partendo da dove sei, spostati a est di ulteriori x' metri;
- poi spostati a nord di ulteriori y' metri.

Lo spostamento complessivo ad est sarebbe di $x+x'$ metri, quello a nord di $y+y'$ metri. (Lo stesso risultato sarebbe descritto da una formula più complicata se si preferisse usare la rappresentazione polare dei numeri, ma questo non è un problema).

L'operazione di *moltiplicazione* invece corrisponderebbe alle seguenti istruzioni

- aumenta l'angolo rispetto alla direzione est di un ulteriore angolo θ', restando sempre alla stessa distanza dalla base;

- muovendosi nella direzione raggiunta (indicata dall'angolo) prolunga la distanza dalla base di ρ' volte;

in questo modo, ci troveremo alla fine ad un angolo complessivo $\theta + \theta'$ dalla direzione est e ad una distanza dalla base di $\rho\rho'$ metri; l'ordine delle due istruzioni è irrilevante. (Il risultato sarebbe dato da una formula più complicata nel caso della rappresentazione cartesiana dei numeri, ma neanche stavolta questo è un problema).

La formula di de Moivre data in Eq. 2.17 ad esempio, corrisponderebbe allora alla seguente proposizione: *per raggiungere una qualsiasi direzione angolare identificata da* θ*, è possibile operare in sequenza n piccoli cambiamenti di direzione, ognuno di un angolo* θ/n*.* In questa forma, la proposizione risulta anche troppo evidente all'intuito geometrico, da rischiare di esser squalificata come ovvia. Ma come vedremo, questa proposizione è proprio al cuore della formula di Eulero, di cui parleremo in seguito, quella che viene spesso riconosciuta per essere la formula più bella di tutte quelle note (oltre che ad essere enormemente utile).

Una considerazione Azzardo una valutazione conclusiva, anche al fine di concludere l'elegante danza di elaborazioni formali che abbiamo seguito in questo lungo capitolo. A me sembra tanto che il cosiddetto 'piano complesso' sia proprio e semplicemente lo stesso piano degli antichi geometri, e chiamarlo 'complesso' sia solo un modo di insistere su una terminologia ('numeri complessi') che non aiuta ad avvicinarsi a loro.

Poi, per carità, non voglio fare l'iconoclasta; continuerò ad usare questo termine come fan tutti per evitare di essere frainteso, ma credo che ogni tanto faccia bene rendersi conto che quando si accettano o meglio 'si comprano' delle locuzioni verbali, compriamo anche delle intuizioni, delle idiosincrasie e anche dei sentimenti, che di volta in volta possono essere più o meno condivisibili, e anche, più o meno rispettosi della storia delle idee.

Capitolo 3

Numero e, crescita esponenziale e funzione esponenziale

3.1 Il numero e o numero di Nepero

3.1.1 Come ricordarne le prime cifre

Il numero e o costante di Nepero è considerato uno dei numeri più importanti della matematica, ma spesso risulta essere uno degli scogli che intimidiscono chi si avvicina a questa disciplina. Quindi per colmare almeno psicologicamente il divario, mi sembra utile sapere prima possibile il suo valore, approssimato si intende (una roba tipo "pi greco vale 3 e 14"). C'è un semplice trucco per tener a mente le prime 13 cifre di e. Basta imparare una buffa poesiola: "io ricordo a menadito la costante e, mediante la tiritera data quale riepilogo". Il metodo di decodifica è semplicemente questo: una parola lunga due lettere vale 2; una parola lunga sette lettere vale 7; ecc. Dunque scriveremo

> io (2) ricordo (7) a (1) menadito (8) la (2) costante (8) e (1), mediante (8) la (2) tiritera (8) data (4) quale (5) riepilogo (9)

che corrisponde al valore 2,718281828459... (la prossima cifra è uno zero, e siamo oltre il 13, alla faccia della scaramanzia).

3.1.2 La formula di Bernoulli per e

Ora che ci siamo assicurati un piccolo vantaggio, ci serve pur sempre una definizione, una regola insomma, che ci permetta, volendo, di calcolare e. Il primo a fornirla non fu Nepero ma Jakob Bernoulli,[1] che si proponeva di elevare a potenza un numero sempre più prossimo ad uno:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ considerando in successione } n = 1,2,3,4,.... \qquad (3.1)$$

La motivazione di un contaccio del genere è una considerazione di tipo finanziario. Se alla fine dell'anno ci viene offerto il 100% del capitale di partenza, avremo semplicemente il doppio di quello che

[1] Potrebbe risultare sconcertante che questo passo non sia dovuto a Nepero, ma chi conosce un po' la storia della scienza sa che questa situazione non è strana. Anzi, è stata addirittura proposta una legge semiseria, detta legge di Stigler, che recita così: *"una scoperta scientifica non riceve mai il nome dal suo autore"*. (Nel caso in esame Nepero fece dei calcoli preliminari e importanti, ma non arrivò a definire davvero questo numero.)

avevamo all'inizio; questo è il risultato della formula di Bernoulli se poniamo $n = 1$. Se invece (come nel caso $n = 2$) ci venisse dato solo il 50% in più a metà anno, e poi ci venisse dato ancora il 50% di quello che possediamo alla fine, avremmo guadagnato qualcosa: infatti gli interessi di metà anno sarebbero diventati a loro volta fruttiferi. Ci domandiamo allora, se questi interessi fossero diminuiti ad $1/n$, ma fossero assegnati n volte durante l'anno, quanto avremmo alla fine dell'anno? Da un lato, le aggiunte sono sempre più piccole; dall'altro, ce ne sono tante... e la risposta è proprio il numero che Bernoulli voleva calcolare:

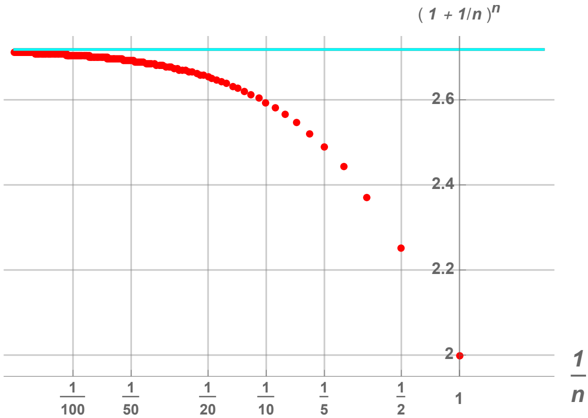
$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{3.2}$$

Siccome abbiamo tutti delle calcolatrici, possiamo provare da soli a fare questo calcolo.[2] Il risultato che trovo è illustrato nella Fig. 3.1. Dalla tabella annessa, si capisce che questa formula non è il massimo della praticità, siccome non basta moltiplicare 1000 fattori per riprodurre le prime tre cifre del numero e.

3.1.3 La formula di Eulero per e

Il prossimo passo avanti venne fatto da Eulero, che per prima cosa rese più esplicito il prodotto che definisce questo numero, utilizzando la formula del binomio di Newton per avere una espressione esplicita di $(a+b)^n$. Immagino che tutti si ricòrdino la formula del binomio $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, o magari quella $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; ci serve però quella con un esponente n generico.

[2]Per chi volesse provare subito ad andare fino in fondo, suggerisco invece di prefiggersi di dimostrare che questa serie di numeri è crescente al crescere di n.



n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2.0000
3	2.3704
10	2.5937
30	2.6743
100	2.7048
300	2.7138
1000	2.7169
3000	2.7178
10000	2.7181
30000	2.7182

Figura 3.1: *La formula di Bernoulli per il numero e, equazione 3.2, messa alla prova. (Notare che n cresce procedendo verso* sinistra*).*

La formula viene data e discussa in tutti i dettagli[3] nell'appendice C e da essa troviamo

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{m=0}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)....\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\times\frac{1}{m!} \tag{3.3}$$

Come ho già detto i ragionamenti che ci son dietro sono confinati nell'appendice, scritta per chi fosse interessato ai dettagli; a noi servirà soltanto considerare l'espressione qua sopra, dove evidenzio la presenza del simbolo $m!$ che indica il *fattoriale del numero* m ed è così definito $0! = 1;\ 1! = 1;\ 2! = 2\cdot 1 = 2;\ 3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6;\ 4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$; ecc. Fermiamoci dunque a riflettere su questa somma e ragioniamo sul singolo termine, per un valore di

[3]Chi volesse cimentarsi a trovarla da solo può seguire il metodo matematico detto 'dell'induzione': sappiamo già la formula nel caso $n = 2$, serve solo capire la regola di come, assunto noto il caso n, si passa al caso $n+1$.

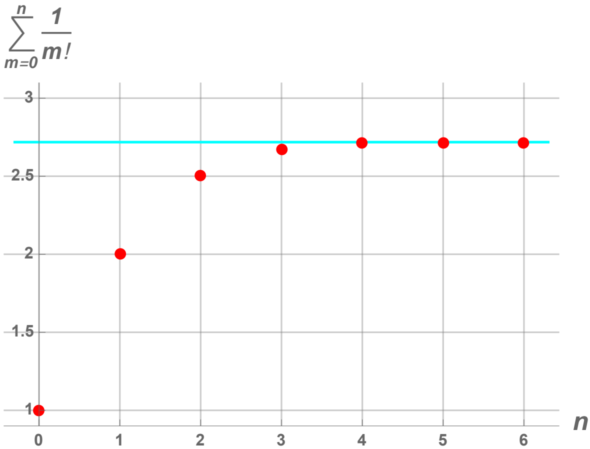
m fissato. Notiamo che si può considerare un valore di n grande a piacere; virtualmente lo potremmo pensare infinito, senza che succeda niente di troppo strano. Tutto quello che bisogna fare è questo: ogni volta che abbiamo un termine "costante fratto n", possiamo riferirci subito al caso che ci interessa, quello in cui n è grandissimo; dunque lo rimpiazziamo con zero. Pertanto, quando si considera n grandissimo, tutti i fattori nella eq. 3.3 tranne l'ultimo si avvicinano indefinitamente ad 1. Resta solo $1/m!$ e la nuova espressione del numero e si semplifica molto:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots \tag{3.4}$$

Incredibile! Abbiamo trasformato un prodotto di infiniti termini (l'espressione di Bernoulli mostrata nella equazione 3.2) in una somma di altrettanto infiniti termini (l'espressione di Eulero). E che succede adesso? La prima cosa da fare sembra ovvia: mettiamo alla prova la nuova formula. Come vediamo dalla Fig. 3.2, essa funziona *molto meglio* della formula originaria. Infatti, ci basta sommare 11 termini per ottenere ben 7 cifre della costante di Nepero.[4]

Qualcuno potrebbe essere ancora turbato dal fatto che, per calcolare e bisogna sommare infiniti termini. Magari si chiederà; ce ne sono tanti, siamo certi che funzionerà? Ma a ben considerare, si tratta di un falso problema: se vogliamo percorrere una certa distanza a piedi, non importa se pensiamo a quella distanza come la sua metà, più la metà della metà, più la metà della metà della metà, ecc.: il totale è sempre lo stesso! Si tratta evidentemente del disagio psicologico legato al cosiddetto 'paradosso di Zenone', che tradotto in un linguaggio matematico, non significa altro che la somma

[4] Infatti, ogni tanto si preferisce cambiare l'ordine della presentazione, e si usa l'espressione di Eulero come definizione del numero e - la cosa non infastidisce, l'essenziale è che il numero sia sempre quello.



n	$\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!}$
0	1.0000000
1	2.0000000
2	2.5000000
3	2.6666667
4	2.7083333
5	2.7166667
6	2.7180556
7	2.7182540
8	2.7182788
9	2.7182815
10	2.7182818

Figura 3.2: *La formula di Eulero per il numero e, equazione 3.4, messa alla prova.*

$1/2+1/4+1/8+1/16+\ldots$ si avvicinerà indefinitamente ad 1 al crescere del numero di termini che includiamo. Quindi, volendo, possiamo dire che la somma $1/2+1/4+1/8+1/16+\ldots$ dà come risultato 1, proprio come la somma $1+1+1/2+1/6+1/24+\ldots$ dà come risultato e.

Anzi... proviamo a portare avanti l'argomento. Consideriamo la formula di Eulero per il numero e, equazione 3.4. Vediamo per prima cosa che tutti i termini sono positivi. Poi, isoliamo i primi due termini e notiamo che tutti gli altri sono uguali o inferiori a quelli contenuti in $1/2+1/4+1/8+1/16+\ldots$ che come abbiamo appena argomentato, dà 1 una volta sommata. Pertanto, abbiamo appena dimostrato per via matematica il rassicurante risultato che $2<e<3$.

3.2 Cosa si intende per 'esponenziale'

Chiunque abbia studiato alle scuole superiori ha sentito parlare della funzione esponenziale e questo termine ricorre spesso anche nel linguaggio comune. Partirei dal chiarire la terminologia (distinguendo tra "crescita" e "funzione" esponenziale, come purtroppo si usa comunemente fare) e poi passerei ad introdurre tre espressioni della funzione esponenziale, che ovviamente danno lo stesso risultato.

3.2.1 Crescita esponenziale

Una storia che immagino tutti abbiano sentito riguarda l'invenzione degli scacchi; la richiamiamo per chi non la sapesse. Un re fu molto colpito da questo gioco, al punto che promise di concedere al suo inventore qualsiasi cosa egli avesse chiesto. La risposta sembrò modesta: "Vorrei solo qualche chicco di riso: 1 chicco sulla prima casella, 2 sulla seconda, 4 sulla terza... e così via, fino all'ultima". Il re incautamente accettò, ma si pentì presto, non appena si accorse che il riso di cui disponeva era ben meno di quello che gli sarebbe servito per onorare la promessa.[5]

Il punto è che, a furia di moltiplicare - ovvero a furia di elevare a potenza - il risultato del processo di crescita diventa ben presto enorme. I greci avrebbero parlato di crescita *geometrica* (non per niente l'elevazione alla seconda potenza viene detta *elevazione al quadrato*, quella alla terza *elevazione al cubo*), noi parliamo di **crescita**

[5] Sfido i curiosi a calcolare questo numero, e a stimare approssimativamente il peso totale del riso.

esponenziale o, qualche volta, geometrica (usando la terminologia originaria).

Perché si verifichi una situazione di crescita esponenziale servono due condizioni

1. che la base sia un numero maggiore di 1 (p.e., nel caso dei chicchi di riso vale 2)
2. che ci sia un esponente n di volta in volta crescente (p.e., le caselle della scacchiera sono 64).

Entrambe le condizioni sono essenziali; infatti, se avessimo scelto per "base" un numero positivo x ma inferiore ad 1, avremmo avuto che il suo inverso è maggiore di uno, $y = 1/x > 1$. Quando si verifica questa situazione, la successione $x^n = (1/y)^n = 1/y^n$ diventa sempre più piccola, poiché il numero 1 viene diviso per il numero y^n, che è sempre più grande: in questo caso si parla infatti di **decrescita esponenziale** oppure geometrica.[6]

3.2.2 Funzione esponenziale

Siamo pronti adesso a discutere la cosiddetta funzione esponenziale per antonomasia - detta molto spesso in matematica 'l'esponenziale' senza ulteriori specificazioni. (Anticipiamo che questa convenzione linguistica non va molto d'accordo con la precedente, siccome - come vedremo - si usa una ed una sola base, sempre quella. Quindi,

[6] Un esercizio un po' buffo a titolo di sommario: immaginiamo che siano stati appena scoperti 10 *zombi,* e si sia saputo che il loro numero aumenta del 10% ogni giorno. Quanti ce ne sono dopo un mese? Passerà più o meno di un anno prima che il nostro pianeta sia popolato da 8 miliardi di *zombi*?

ci vuole un po' di cultura per non perdersi e serve l'uso del buon senso.)

3.2.2.1 Prima espressione:

La prima definizione è così semplice da essere un po' deludente.[7] Siccome il numero e è pur sempre un numero positivo ed è anche maggiore di uno, possiamo usarlo come base, ed associare a qualsiasi numero x (positivo negativo o nullo) un altro numero positivo

$$y = e^x \tag{3.5}$$

Si scrive anche (si intende proprio la stessa cosa)

$$y(x) = \exp(x) \tag{3.6}$$

Anche se sono quasi certo che il lettore conosca questa funzione, lo invito a disegnarne il grafico e ad elencarne tutte le proprietà che conosce.

3.2.2.2 Seconda espressione:

Siamo già alla seconda presentazione della stessa funzione. Questa seconda espressione usa semplicemente la formula di Bernoulli per il numero e. Partiamo da un valore di n grande a piacere e consideriamo

$$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^x \tag{3.7}$$

[7] Prometto che torneremo in seguito a parlare delle sue numerosissime applicazioni.

Indipendentemente da come effettuiamo i calcoli, vediamo subito che, per n che diventa indefinitamente grande, dentro la parentesi quadra avremo il numero e; pertanto, facendo questo limite, otterremo esattamente e^x. Ma prima di fare il limite, consideriamo i seguenti passaggi. Iniziando dal caso $x > 0$, troviamo

$$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^x = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = \left(1+\frac{x}{m}\right)^m \quad \text{dove abbiamo posto } m = nx \tag{3.8}$$

Dunque, quando n diventa grande, anche m diventa grande; anzi, possiamo rendere m grande a piacere. Arriviamo così alla conclusione che

$$y = e^x = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m \tag{3.9}$$

che potremmo chiamare espressione di Bernoulli della funzione esponenziale.[8] Se vogliamo capire meglio il senso della formula non dobbiamo che ripercorrere il ragionamento di Bernoulli illustrato nella sezione 3.1.2; non è difficilissimo ed è gratificante. Per concludere la discussione, ecco un breve sommario a parole di quello che significa questa espressione: *se viene assegnato m volte un interesse dell'x percento diviso per m il risultato finale è proprio* e^x (è forse simile al modo in cui l'avrebbe messa Bernoulli, che da bravo svizzero, era attento ai risvolti finanziari dei suoi calcoli).

3.2.2.3 Terza espressione:

L'ultima espressione per la funzione esponenziale si ottiene partendo dalla formula appena ottenuta ed applicando il ragionamento di

[8] Lasciamo agli interessati il compito di adattare il ragionamento anche ai casi in cui x è negativo o nullo, e di convincersi che la formula finale resta la stessa.

Eulero per espandere il binomio $(1+x/m)^m$. Dovrebbe essere facile convincersi che i conti sono proprio gli stessi, a parte il fatto che ogni termine della somma verrà moltiplicato per una potenza di x. Scriviamo allora subito l'espressione di Eulero, eccola

$$y = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \ldots \tag{3.10}$$

e lasciamo svolgere i calcoli a chi non ne fosse convinto, usando alla bisogna l'appendice C. Giusto a scopo di controllo: se $x > 1$, si potrebbe temere che la potenza x^n sia "troppo grossa"; ma a ben guardare, il termine a denominatore, non appena $n > x$, cresce ancora di più. Per questo i termini della somma cominciano a decrescere da un certo punto in poi. Per esempio:

$$\begin{aligned} 54.6 \approx e^4 &= 1+4+8+10.7+10.7+8.5+ \\ &+5.7+3.3+1.6+\ldots. = 53.4+\ldots \end{aligned} \tag{3.11}$$

insomma, non ci facciamo spaventare troppo dagli infiniti, anche se a volte nascondono dei problemi o delle trappole;[9] consolidiamo il terreno alle spalle e affrontiamo i problemi quando ci sono.

3.3 Perché la funzione esponenziale è speciale

La funzione esponenziale ha tante proprietà che la rendono utile e speciale. Per concludere questa introduzione ne dobbiamo proprio

[9] A chi poi volesse verificare fino in fondo di aver capito questi concetti suggerisco di dimostrare che l'identità $e^x e^{-x} = 1$ resta valida anche utilizzando le formule di Bernoulli e di Eulero per l'esponenziale. Per il primo esercizio, raccomando di distinguere il caso $x = 0$ dal caso $x > 0$; per il secondo, di essere pazienti nello scrivere le somme e di usare se servono i risultati presentati in appendice C.

ricordare una, che è forse la più importante di tutte. Vogliamo valutare quanto cresce la funzione $y(x) = e^x$ passando dal punto iniziale X al punto finale $X + x$. Possiamo scrivere

$$\text{incremento medio}(X,x) = \frac{\text{variazione variabile dipendente}}{\text{variazione variabile indipendente}} =$$
$$= \frac{y(X+x) - y(X)}{(X+x) - X} = \frac{e^{X+x} - e^X}{x} = e^X \, \frac{e^x - 1}{x} \tag{3.12}$$

che a prima vista potrebbe non sembrare un utile passo avanti verso il calcolo dell'incremento, ma a questo punto basta usare l'espressione di Eulero per sviluppare il numeratore:

$$\text{incremento medio}(X,x) =$$
$$= e^X \, \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots\right) - 1}{x} = e^X \, \left(1 + \frac{x}{2} \ldots\right) \tag{3.13}$$

Preso un valore x piccolo a piacere (ovvero, quando ci avviciniamo ad $x = 0$) è facile convincersi che la quantità tra parentesi nell'ultimo passaggio si avvicina sempre di più ad 1.[10]

Quando l'incremento medio viene calcolato per un punto iniziale ed uno finale che sono vicinissimi, possiamo parlare di *incremento istantaneo* della funzione. Nel linguaggio della matematica, ci si riferisce alla stessa quantità con il termine *derivata della funzione*

[10] Convincersi che lo stesso argomento porta a ritenere valido il cosiddetto limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \tag{3.14}$$

Il lettore attento noterà che il numero progressivo della precedente formula è 3.14 ma che la formula non ha niente a che fare con il pi greco (da quanto ne posso capire).

– in questo caso ovviamente parliamo della derivata della funzione esponenziale. Concludiamo che

> l'incremento istantaneo (la derivata) della funzione esponenziale coincide con la funzione stessa

Nessuna altra funzione ha questa proprietà, tranne la funzione esponenziale moltiplicata per una costante.[11] Se ci piacciono le formule della matematica, diremo che postulare l'uguaglianza tra una funzione $f(x)$ e la sua derivata, indicata con $f'(x)$, determina la funzione stessa:

$$f'(x) = f(x) \text{ implica che } f(x) = \text{costante} \times e^x \tag{3.15}$$

Ci sarebbero ancora tante cose interessanti da raccontare sul numero e e sulla funzione esponenziale e^x, ma per gli scopi di questa introduzione possiamo fermarci qui; solo per i lettori davvero curiosi, includiamo un'ultima considerazione, carina e stimolante anche se non essenziale per seguire il discorso.

[11] Riporto un argomento di plausibilità per gli interessati, che assumo conoscano le derivate. Supponiamo che una funzione $f(x)$ soddisfi l'equazione $f'(x) = f(x)$. Partiamo dal punto iniziale $x = 0$ ed arriviamo al punto finale che chiameremo X. Suddividiamo l'intervallo da 0 ad X in n parti, ogni intervallo con larghezza $d = X/n$ piccola a piacere. L'equazione implica che $(f(d) - f(0))/d \approx f(0)$ che riscriviamo $f(d) \approx f(0)(1+d)$; l'uguaglianza approssimata diventa sempre più accurata quando d decresce. Applicando di nuovo lo stesso ragionamento, ma stavolta partendo dal punto $x = d$, avremo $f(2d) \approx f(d)(1+d)$; ecc. Mettiamo tutto insieme, abbiamo $f(nd) = f(X) \approx f(0)(1+d)^n = f(0)(1+X/n)^n$. Prendiamo n sempre più grande, troviamo $f(X) = f(0)\,e^X$. Fine dell'argomento.

3.4 La geometria fa capolino anche tra gli esponenziali

Il lettore attento avrà notato che anche in questo capitolo, come nei precedenti, abbiamo parlato di procedure (moltiplicazioni o somme) ripetute moltissime volte - nello stesso modo in cui abbiamo considerato poligoni con numerosissimi lati in precedenza - ma a differenza dei capitoli precedenti, non abbiamo mai fatto degli espliciti riferimenti alla geometria. Lo faremo in dettaglio nel prossimo capitolo, ma proprio per non deludere questo lettore che ci è molto caro, vorremmo menzionare a questo punto un argomento che lo potrebbe incuriosire (anche se non è essenziale per il seguito del discorso). Procediamo quindi con alcuni ragionamenti che coinvolgono la funzione esponenziale, che a prima vista potrebbero sembrare di natura algebrica o analitica ma che presto riveleranno dei collegamenti con la geometria.

A partire dalla funzione esponenziale, Riccati introdusse due nuove funzioni, che chiamò *coseno e seno iperbolico*:

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad , \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \tag{3.16}$$

Non c'è niente di male a fare questo; evidentemente, qualsiasi sia il valore del parametro reale t, queste due funzioni che hanno un valore ben definito, proprio come la funzione esponenziale. Però, se uno si limitasse a disegnarle, come viene fatto nella figura 3.3, non troverebbe nessuna ragione per chiamarle coseno e seno iperbolico; non sembrerebbero affatto somigliare al coseno e seno noti dalla trigonometria, e non sono neppure periodiche...

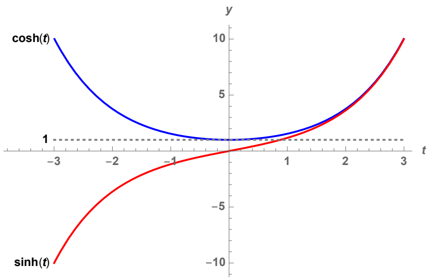


Figura 3.3: *Grafico del seno e del coseno iperbolici. Per comodità visuale, si mostra anche la retta orizzontale* $y = 1$. *Si noterà che il seno iperbolico può assumere qualsiasi valore, mentre il coseno iperbolico è sempre maggiore di* $y = 1$ *per ogni valore di* $t \neq 0$.

Ma la cosa che ci interessa di più, agli scopi della presente discussione, è proprio chiarire il senso di questi nomi, che solo a prima vista sono assegnati contro il buon senso. Eccoci arrivati alla spiegazione: se prendiamo la differenza delle due funzioni appena definite, dopo averle elevate al quadrato, abbiamo

$$(\cosh t)^2 - (\sinh t)^2 = 1 \tag{3.17}$$

Questo significa che, per ogni valore di t, le coppie di punti (x, y) definite da $x = \cosh t$ e $y = \sinh t$ cadono sopra un'iperbole di equazione

$$x^2 - y^2 = 1 \tag{3.18}$$

Questa relazione somiglia molto alla relazione tra coseno e seno, che infatti vengono dette a volte funzioni *circolari* (o trigonometriche, oppure goniometriche). Il segno differente, ovvero il segno meno a posto del segno più, corrisponde al passare dall'equazione della circonferenza unitaria $x^2 + y^2 = 1$ a quella dell'iperbole retta $x^2 - y^2 = 1$.

Inoltre, giocando un po' con queste funzioni, si ottengono formule per la duplicazione degli angoli e molte altre che somigliano a quelle della trigonometria. Vediamo un esempio:

$$\begin{aligned}\sinh 2t = \frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2} &= \tfrac{1}{2}(e^t+e^{-t})(e^t-e^{-t}) = \\ &= \tfrac{1}{2}\,(2\cosh t)\,(2\sinh t) = 2\sinh t\cosh t\end{aligned} \tag{3.19}$$

che è identica a $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ che conosciamo bene e abbiamo usato e richiamato, p.e., nella appendice A. Queste considerazioni sembrano suggerirci qualche cosa, che non è ancora diventato del tutto evidente, ma di sicuro ha a che fare con la geometria. (In effetti è proprio così e ce ne convinceremo presto.)

Chi a questo punto volesse capire più a fondo queste funzioni, può fare riferimento alla appendice E; altrimenti, possiamo procedere ed arrivare finalmente a discutere quella che in molti hanno chiamato la formula più bella della matematica. (Chi invece volesse fermarsi per andare ancora più a fondo dell'argomento, può utilmente consultare il bel libro [12] e la pagina di Wiki sulla costante di Nepero, come sempre breve ma non inutile [13].)

Capitolo 4

La formula più bella

4.1 Introduzione

Siamo finalmente pronti a presentare la cosiddetta formula più bella. Ma prima di procedere è bene - come sempre - chiarire il senso dei termini, che in questo caso sono quanto mai ambigui. Infatti, ci si può a buon diritto chiedere: “bella” in che senso? E non è tutto, perchè se pure esiste un certo consenso su quale sia questa formula, essa discende da un’altra formula, a cui a volte si attribuisce lo stesso titolo; come dire, “è più bella la figlia o la mamma?”.

Mettiamo da parte l’ironia e affrontiamo il punto principale, cosa significa il concetto di bellezza in questo contesto. C’è chi taglia corto, negando che ci sia qualcosa in matematica che possa essere detto “bello”, ma sembra ragionevole ricordare a questo punto il proverbio *i gusti sono gusti*, e si potrebbe forse convenire che per apprezzare qualcosa bisognerebbe come minimo conoscerla. Quindi, assumiamo che stiamo ragionando di bellezza tra persone che non hanno in ubbia la matematica e che un po' la conoscono (o che perlomeno, siano arrivate a leggere fino a questo punto). Mostriamo senza ulteriori indugi la formula a cui ci si riferisce:

$$e^{i\pi}+1=0 \tag{4.1}$$

Come si vede, essa coinvolge tutti e tre i numeri che abbiamo definito nei capitoli precedenti: π, i ed e. Tale formula indica una connessione che non potevamo immaginarci prima di incontrarla, e se pure non vogliamo concederle subito il riconoscimento di "bella", possiamo probabilmente ammettere che sia sorprendente o inaspettata. Nel seguito di questo discorso, ci proponiamo di mostrare come essa sia inevitabilmente connessa con le precedenti considerazioni (ovvero, di dimostrarla) e lo faremo in più modi, valutando le prove che mano a mano presenteremo, e gli strumenti che adopereremo a tal fine. Indicheremo quali sono le strettissime connessioni con altre formule della matematica, molto importanti e molto utili. Come in tutto il resto di questo quaderno, ci cureremo di procedere utilizzando gli strumenti disponibili a studenti di scuola superiore.

Il motivo per cui viene detta la formula più bella è semplice da spiegare ma inappagante; ci sono state varie votazioni, e si è spesso raggiunto un consenso a favore di questa formula. Inoltre, hanno parlato a suo favore in tanti; p.e., un bravissimo fisico americano, molto noto al grande pubblico di lingua inglese, Richard Feynman, l'ha definita "la formula più notevole in matematica" e "il nostro gioiello". Questo spiega il titolo, ma non ci sembra il caso di accontentarci solo di consenso o di parole. Preferiremmo assai se il lettore si sentisse libero di scegliere la sua formula preferita, se vuole; magari si troverà d'accordo con gli altri o magari ci mostrerà (o scoprirà) una formula ancora più bella: di certo si divertirà di più.

(E se ci fosse chi volesse andare davvero a fondo, sia sulla storia che c'è dietro che su alcune importanti applicazioni, segnalo subito [14, 15, 16] e come al solito il breve sommario della pagina Wiki [17].)

4.2 Esplorazioni / Carnevale di numeri

Una reazione normale davanti a qualcosa che non si capisce è: *ma cosa vogliono da me* o anche *poi ci penso.* Mi riferisco in particolare a quello strano esponenziale di un numero complesso nella equazione 4.1. Però, a questo punto del discorso, senza pretendere troppo, possiamo provare ad appoggiarci a quello che abbiamo imparato sulla funzione esponenziale, per vedere almeno fino a che punto arriviamo. La proposta per procedere è quindi la seguente; usiamo le espressioni di Bernoulli e di Eulero (equazioni 3.9 e 3.10) e vediamo che succede.

4.2.1 Procediamo con Bernoulli

Iniziamo a trascrivere l'equazione di Bernoulli 3.9:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \tag{4.2}$$

Possiamo pensare a questa equazione come a un insieme di istruzioni, che ci consente di calcolare $e^{i\pi}$. Basta sostituire $x = i\pi$ e fare con pazienza i calcoli, considerando valori di n sempre più grandi.

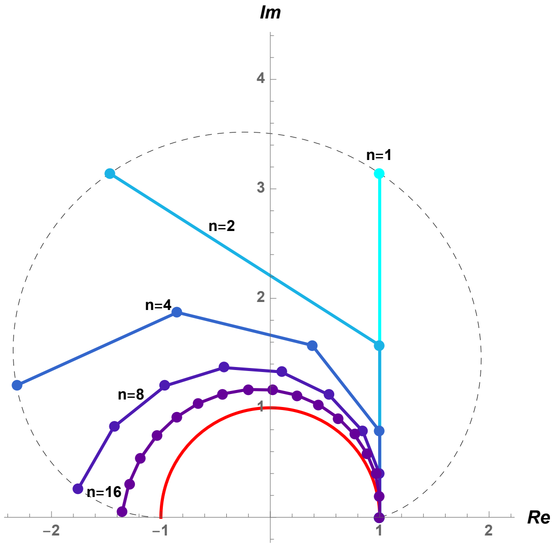


Figura 4.1: *Traiettorie di punti che partono da $x = 1$ e che si muovono nel piano complesso, e sono state costruite allo scopo di ottenere $e^{i\pi}$ nel limite in cui $n \to \infty$, riproducendo proprio l'espressione di Bernoulli dell'esponenziale. Per una definizione formale di queste traiettorie, si veda l'equazione 4.4 e la relativa discussione.*

Sembra molto difficile, ma proviamo a ragionare su un certo valore n fissato. Dovremmo calcolare

$$\left(1+\frac{i\pi}{n}\right)^n \tag{4.3}$$

Se abbiamo capito come usare i numeri complessi lo sappiamo fare, si tratta di un semplice elevamento a potenza. Se vogliamo, faremo n moltiplicazioni; se ci piace di più, scriveremo il numero complesso $1+i\pi/n$ in forma polare e useremo le proprietà che abbiamo imparato. In entrambi i casi otterremo lo stesso risultato, ed inoltre, se le cose funzionano, al crescere di n il valore ottenuto si avvicinerà sempre di più a -1. Anzi, possiamo semplificarci la vita procedendo per gradi; per ogni valore fissato di n, dobbiamo fare n moltiplicazioni in sequenza,

$$\left(1+\frac{i\pi}{n}\right)^k \text{ dove } k=0,1,2....n \tag{4.4}$$

che significa una insieme di punti (una traiettoria) nel piano complesso che inizia dal punto $x=1$ (caso $k=0$). Insomma, forse sarà un conto noioso, ma fattibile. Il risultato è quello mostrato nella figura 4.1, dove abbiamo usato i valori $n=1,2,4,8,16$ (scelti per pura comodità). Succede proprio quello che ci aspettavamo: al crescere di n ci avviciniamo sempre di più al punto -1.

4.2.2 Procediamo con Eulero

Passiamo adesso alla espressione di Eulero dell'esponenziale 3.10, che trascriviamo:

$$e^x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \tag{4.5}$$

dove naturalmente siamo interessati a porre $x=i\pi$ per verificare se il risultato promesso dalla equazione 4.1 sia plausibile. Per potere effettuare i conti, iniziamo allora a calcolare la somma fino all'n-simo addendo

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(i\pi)^k}{k!}=1+i\pi+\frac{i^2\pi^2}{2}+\frac{i^3\pi^3}{6}+...+\frac{i^n\pi^n}{n!} \tag{4.6}$$

Questo calcolo è ancora più facile del precedente, in quanto dopo avere calcolato $i^0=1, i^1=i, i^2=-1, i^3=-i$... siamo a posto con i

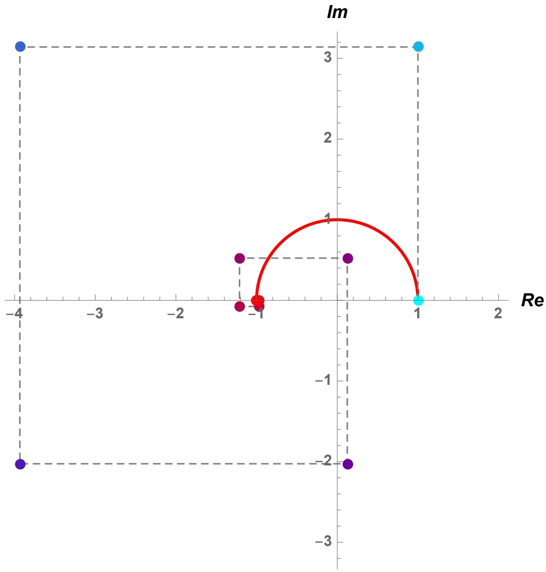


Figura 4.2: *Traiettorie di punti che partono da $x = 1$ e che si muovono nel piano complesso, e sono state costruite allo scopo di ottenere $e^{i\pi}$ nel limite in cui $n \to \infty$, riproducendo proprio l'espressione di Eulero dell'esponenziale. Per una definizione formale di queste traiettorie, si veda l'equazione 4.6 e la relativa discussione.*

numeri complessi! Il resto sono semplici moltiplicazioni e somme di numeri reali. La traiettoria con cui ci avviciniamo al risultato finale nel piano complesso viene mostrata in figura 4.2 è una specie di "spirale rettangolare" (Archimede e Apollonio, perdonatemi!). Dopo 10 passi consecutivi, ovvero, considerando $n = 1, 2, 3....10$ vediamo che ci avviciniamo sempre di più al valore -1. Insomma anche in questo è caso tutto a posto: funziona!

A questo punto, qualcuno potrebbe anche tirare un sospiro di sollievo, ma non un matematico onesto, che pretenderà una vera e propria prova che la relazione mostrata in equazione 4.1 sia proprio giusta-giusta, e che ci convinca oltre ogni ragionevole dubbio (una dimostrazione, insomma). È l'argomento che affronteremo nella prossima sezione.

4.3 Tre dimostrazioni e un paio di commenti

4.3.1 La dimostrazione originaria e la formula di Eulero

Eulero era un grande matematico, uno dei più grandi di sempre, ed era ben aggiornato sulle conoscenze disponibili al suo tempo. In particolare, conosceva la formula di de Moivre, equazione 2.18, che riportiamo qui sotto per chiarezza di esposizione

$$\cos\theta + i\sin\theta = \left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)^n \tag{4.7}$$

Come sappiamo, questa formula vale per ogni valore intero di n. Eulero suggerì di considere il caso di n grande a piacere, o come si dice, un valore che tende all'infinito. Vediamo allora che in queste condizioni - come discusso in sezione 1.3.2 o come si capisce dalla figura 1.4 - possiamo approssimare il coseno all'interno della parentesi con il valore 1, ed il seno con il valore del suo argomento, θ/n. Dunque, avremo

$$\cos\theta + i\sin\theta = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{i\theta}{n}\right)^n \tag{4.8}$$

che, guarda guarda, mostra nel membro a destra l'espressione di Bernoulli della funzione esponenziale, data in equazione 3.9. Concludiamo allora senza bisogno di altro

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{4.9}$$

Questa è la famosa formula di Eulero (e spero non ci sia bisogno di sottolineare che θ indica un valore qualsiasi, tanto valeva scrivere x, y o n). Considerando dunque il caso particolare $\theta = \pi$, ne deriva immediatamente proprio la formula 4.1 – la c.d. formula più bella, insomma.

4.3.2 Usiamo le somme di infiniti termini

Una dimostrazione differente, che viene spesso riportata nelle trattazioni divulgative, si basa sulla espressione delle tre funzioni che ci servono - esponenziale, seno e coseno - in termini di somme di infiniti monomi.[1]

Vediamo bene su quali basi si procede. L'espressione di esponenziale è quella data nella equazione 3.10, ne riportiamo i primi termini

$$e^x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \ldots \tag{4.10}$$

(a denominatore c'è il fattoriale, per esempio $5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$). Ma l'espressione di seno e coseno, dove la troviamo? Per completare la dimostrazione, qui si diramano le strade. Se si conosce la serie di Taylor (introdotta da Gregory in un caso particolare)

[1] Ovvero, tramite l'espressione di queste funzioni in *serie di potenze*, come si usa dire in gergo matematico.

il passo è molto semplice; ma bisogna dare per scontato l'uso delle tecniche dell'analisi. Si può procedere senza presupporre queste conoscenze? Sì. Basta utilizzare l'osservazione presentata nella appendice D e specificamente nell'ultima formula, equazione D.16, che riportiamo qui per riferimento

$$\begin{cases} \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \ldots \\[2ex] \sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \ldots \end{cases} \tag{4.11}$$

Il confronto è molto eloquente. Vediamo che i coefficienti sono gli stessi, a parte i segni. Non ci vuole molto a convincersi che il trucco è quello di considerare l'esponenziale utilizzando ix al posto di x, o in altre parole, lo dobbiamo calcolare per valori *puramente immaginari*. La somma resta sempre formalmente definita, e diventa

$$\begin{aligned} e^{ix} = {} & 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{6} + \frac{(ix)^4}{24} + \frac{(ix)^5}{120} + \ldots \\ & 1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + i\frac{x^5}{120} + \ldots \end{aligned} \tag{4.12}$$

Possiamo allora identificare facilmente la parte reale e quella immaginaria

$$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + i\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots\right) \tag{4.13}$$

e a questo punto, bingo! siamo arrivati alla conclusione

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{4.14}$$

che è proprio la formula di Eulero. Tutto è bene quello che finisce bene. Ma un'osservazione che ci permettiamo è che questa strada sembra meno trasparente della precedente.

4.3.3 Dimostrazione bonus (per chi conosce l'analisi)

Consideriamo la funzione del parametro θ così definita

$$f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta \tag{4.15}$$

Notiamo i seguenti due fatti:

1. Se $\theta = 0$, vale
$$f(0) = 1 \tag{4.16}$$

2. Se prendiamo la sua derivata, abbiamo
$$\frac{df}{d\theta} = -\sin\theta + i\cos\theta = i(i\sin\theta + \cos\theta) = if(\theta) \tag{4.17}$$

Quindi, possiamo considerare il seguente problema; quale è quella funzione che soddisfa le due condizioni

$$\begin{cases} \dfrac{df}{d\theta} = if(\theta) \\ f(0) = 1 \end{cases} \tag{4.18}$$

Come discusso nella sezione 3.3 (vedi in particolare la nota a pie' di pagina numero 11) questo problema ha una soluzione unica e ben definita, e precisamente

$$f(\theta) = e^{i\theta} \tag{4.19}$$

che coincide con la formula di Eulero. Questa dimostrazione è molto 'economica' ma di nuovo evidenzia la tecnica matematica e la coerenza dell'argomento piuttosto che la sua immediatezza all'intelletto.

4.3.4 Una verifica di coerenza

Possiamo poi procedere ad esporre alcune considerazioni che non sono proprio una dimostrazione, ma sono comunque interessanti. Proviamo a prendere per buona la relazione di Eulero, data nella equazione 4.9 ed esploriamone le conseguenze. Consideriamo le relazioni $e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$ e $e^{i\beta}=\cos\beta+i\sin\beta$ e moltiplichiamole; a sinistra abbiamo $e^{i\alpha}e^{i\beta}$, che utilizzando le proprietà dell'esponenziale ci porta a $e^{i(\alpha+\beta)}$; a destra abbiamo il prodotto $(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$, che riscriviamo usando le proprietà dell'unità immaginaria, troviamo che la parte reale vale $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)$ mentre la parte immaginaria vale $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cos\beta\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$. Questo implica che le proprietà note sono coerenti con la relazione di Eulero; oppure, volendo, potremmo usare questa relazione per *definire* cosa è l'esponenziale complesso. A noi non servirà ragionarne oltre, e ci contenteremo di questa annotazione come ulteriore e valido modo per ricordarsi ancora meglio la cosiddetta 'formula più bella'.

4.3.5 Gli aspetti geometrici

Dalle cose dette appena sopra, credo che non ci siano dubbi sulla mia dimostrazione preferita: quella di Eulero, la prima. Naturalmente, una scelta del genere non ha molto senso scientifico, Per chi apprezza i motti arguti, potremmo citare a questo punto Deng Xiaoping che usava dire "Non importa che sia un gatto bianco o un gatto nero, finché cattura topi è un buon gatto". Usando un linguaggio più formale, il contributo alla verità (o meglio alla coerenza) di queste dimostrazioni è lo stesso. Il punto però è di natura psicologica; la dimostrazione di Eulero, se considerata dal punto di vista geometrico illustrato nella sezione 2.7, è molto più chiara, molto più intelligibile.

Per spiegare in dettaglio cosa intendo, scriviamo di nuovo la formula 4.1 espandendo il significato di $e^{i\pi}$. Ecco il risultato

$$\left(1+\frac{i\pi}{n}\right)^n = -1 \text{ se i valori di } n \text{ tendono all'infinito} \tag{4.20}$$

Come leggerebbe questa formula un geografo, che è interessato a descrivere le direzioni del piano e le trasformazioni a cui possono essere soggette? Stiamo riferendoci alle idee di Wessel, che abbiamo esposto nella sezione 2.7.[2]

La risposta è semplicemente questa. Iniziamo guardando verso est, la cui direzione è caratterizzata dal numero $+1$. Vogliamo arrivare gradualmente a guardare verso ovest, la cui direzione è caratterizzata caratterizzato dal numero -1: vedi figura 2.5. Per farlo, ci organizziamo in questo modo:

1. suddividiamo l'intero angolo da percorrere in piccole frazioni da $d\theta = \pi/n$ radianti

2. guardando ad est, o meglio partendo dalla direzione caratterizzata dal numero $+1$, muoviamoci appena appena verso sinistra (che all'inizio ci porta verso la direzione nord) di un piccolo passo $d\theta$;

3. ripartendo dal punto in cui siamo arrivati, ripetiamo il precedente passo per n volte, fino a percorrere una distanza uguale a quella desiderata, π radianti.

[2]Notiamo che la memoria di Wessel sul piano complesso menziona in esplicito i poligoni già nel titolo. Questa annotazione ci fa capire che i problemi su cui Wessel rifletteva erano molto vicini a quelli originariamente considerati dai matematici greci.

Se il passo che abbiamo scelto è molto piccolo (ovvero se n è molto grande) ci muoveremo sulla circonferenza di raggio unitario, o perlomeno molto vicino ad essa, ed alla fine del percorso saremo arrivati a guardare a ovest.

In altre parole, stiamo solo dicendo che per voltarci di 180 gradi dobbiamo fare tanti passettini angolari in seguenza, simili a quelli che farebbero le lancette di un orologio. O se vogliamo dirla in generale, parlare di esponenziali complessi è semplicemente un modo di dare un nome ben definito alla procedura di considerare una certa quantità (in questo caso, la lunghezza della semi-circonferenza, π), dividerla in n-parti ed usarla come incremento n-volte. Niente di troppo misterioso, insomma.

4.4 A che serve la formula più bella?

Siamo arrivati in fondo alla discussione, e per questo possiamo iniziare ad allontanarci anche dal modo di argomentare che abbiamo seguito fino ad adesso, quello matematico, in cui ad un passo ne segue un altro. Lo facciamo per parlare del contesto, ovvero delle varie cornici in cui questi ragionamenti si sono inseriti nel corso del tempo. In altre parole, in questa sezione ci guarderemo un po' intorno senza preoccuparci troppo di parlare di cose che non potremo dimostrare in dettaglio o discutere approfonditamente. E per iniziare, consideriamo la domanda piuttosto diretta: a cosa servono la formula più bella (l'equazione 4.1) e quella di Eulero (l'equazione 4.9) da cui la prima delle due segue immediatamente?

Seni e coseni descrivono situazioni che si ripetono dopo un certo periodo. Possiamo parlare, p.e., di processi che avvengono nello spazio o nel tempo. Sono situazioni importanti in moltissime discipline, per esempio in astronomia, in medicina, o in ingegneria.[3] Pensiamo subito ai segnali audio; agli elettrocardiogrammi, encefalogrammi, ecc., che vengono registrati nella pratica medico/ospedaliera; all'ottica, ai segnali radio... ; o anche alle immagini, che possono essere considerate distribuzioni in una certa regione del piano. Gli esponenziali complessi si sono rivelati molto pratici per questi scopi, ancor più dei seni e dei coseni, che vengono unificati in una singola espressione algebrica - questo dice l'equazione 4.9.

Quando passiamo poi al cuore pulsante della fisica moderna, è difficile evitare di accorgersi quanto siano importanti la formula di Eulero o i numeri complessi stessi. Per apprezzarne le ragioni, ricordiamo l'argomento in breve. Nel 1905 Einstein suggerì che ad una particella o quanto di luce di frequenza di oscillazione ν vada associata l'energia E data da

$$E = h\nu \tag{4.21}$$

dove h è la costante di Planck; stiamo parlando del cosiddetto fotone. Fu de Broglie a ipotizzare che questa relazione valesse per *ogni* particella, di luce o di materia, che avesse una energia fissata. Tale ipotesi guidò Schrödinger ad associare a tale particella la seguente funzione periodica[4]

$$\psi(t) = e^{-i\,2\pi\,\nu t} \tag{4.22}$$

[3] È inevitabile a questo punto evitare di segnalare come, in ingegneria, si usi sovente il simbolo j per l'unità immaginaria allo scopo di evitare confusione con la corrente elettrica indicata con i. Consiglio agli interessati verso questa disciplina di fare una ricerca sul concetto di *fasore:* posso garantire che li aspetta una simpatica sorpresa.

[4] Si noterà che i numeri complessi erano stati già introdotti nella alternativa formulazione della meccanica quantistica, detta meccanica delle matrici e dovu-

dove t è il tempo. Ricorda forse qualcosa? Queste considerazioni sono alla base delle equazioni d'onda di Schrödinger o di Dirac, e sono assolutamente essenziali in chimica teorica,[5] in fisica nucleare o delle particelle, ecc.

Lo stesso tipo di rappresentazione viene utilizzato per descrivere particelle che hanno un impulso p o un momento angolare m fissato; scriveremo infatti: $\psi = e^{i\ 2\pi\ x/\lambda}$ (dove x è la coordinata spaziale e $\lambda = h/p$ è la lunghezza d'onda) oppure $\psi = e^{i\ 2\pi\ m\ \theta}$ (dove θ è una coordinata angolare). Stiamo usando ancora l'equazione di Eulero, evidentemente. (E - sia detto solo *en passant* - le stesse funzioni iperboliche, che qui abbiamo confinato in appendice per non appesantire la lettura del testo, diventano pressoché irrinunciabili quando si ragiona della relatività einsteiniana.)

Qua sopra abbiamo dato molta enfasi agli scienziati che hanno aperto la strada alla descrizione delle particelle per mezzo di funzioni a valori complessi, ed in particolare a de Broglie. A volte, costui viene considerato un pensatore originale o addirittura 'strano', ma personalmente considero questa attribuzione poco generosa; anzi, mi piace presentare un suo brano che ci lascia percepire il suo sforzo di raccontarci queste cose nel modo più pratico possibile:

> Supponendo che la particella abbia una vibrazione interna

ta a Heisenberg, Born, Jordan e Dirac tra gli altri. Per una discussione si veda C.N. Yang, *Square root of minus one, complex phases and Erwin Schrödinger,* nel volume celebrativo per il centenario di Schrödinger (1987) pubblicato dalla Cambridge University Press.

[5] Notiamo che i buffi disegni, frequentemente mostrati nei libri scolastici, che pretenderebbero di rappresentare il modo in cui si dispongono gli elettroni attorno al nucleo (gli 'orbitali') sono dei tentativi di far filtrare il significato fisico descritto dalla funzione a valori complessi associata agli elettroni dell'atomo (detta funzione d'onda).

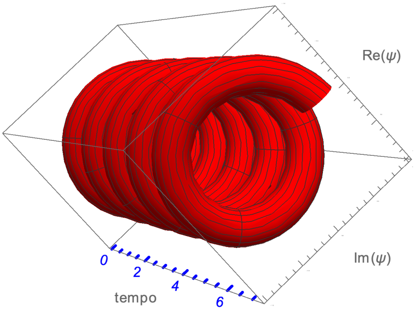


Figura 4.3: *Possiamo pensare alla funzione d'onda di una particella con una data energia, eq. 4.22, come a un elica che si sviluppa nel corso tempo. Trattandosi di uno spazio astratto, la sua visualizzazione è particolarmente arbitraria; in particolare, è solo per motivi decorativi che ho disegnato l'elica con un certo spessore e di colore rosso.*

> che la rende simile ad un piccolo orologio, ho ipotizzato che questo orologio si muova nella sua onda in modo che la sua vibrazione interna rimanga costantemente in fase con quella dell'onda[6]
> *Recherches d'un demi-siècle.* Louis de Broglie (1976)

Si vedano le figure 4.3 e 4.4 ad illustrazione di queste considerazioni, sulle quali mi ripropongo di tornare in modo più diffuso in una futura occasione.

Per concludere, vorrei commentare brevemente sulla situazione relativa all'insegnamento di questi concetti a scuola. Trovo molto curioso che nella nostra patria si pretenda di spiegare la fisica quantistica nei Licei, senza curarsi di introdurre questi aspetti matematici, che di regola sono insegnati solo negli Istituti tecnici. Come abbiamo provato ad argomentare, i modi di farlo ci sarebbero, e le siner-

[6] Il testo originale, del 1973, recita così: “Admettant que la particule possède une vibration interne qui permet de l'assimiler à une petite horloge, je supposais que cette horloge se déplaçait dans son onde de façon que sa vibration interne reste constamment en phase avec celle de l'onde”.

Figura 4.4: *Un orologio del 1920, gli anni in cui veniva concepita l'idea di associare alle particelle di materia un onda, proprio come per le particelle di luce. Nel caso di particelle con energia prefissata, si postulava che l'onda fosse una funzione periodica descritta dalla formula di Eulero.*

gie con gli argomenti che vengono già insegnati sarebbero davvero tante...

Sono stati tanti i pensatori che hanno sottolineato come, in molte branche della scienza, il linguaggio di elezione sia quello della matematica; p.e., l'ha fatto e con forza Cartesio in tempi moderni.

Ma anche il nostro Galileo parlava così

> La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto.
>
> Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.
> *Il Saggiatore.* Galileo Galilei (1623)

E gli esponenziali complessi, come abbiamo visto, servono proprio per parlare di cerchi. Proprio *gli stessi cerchi* di cui ragionava Archimede di Siracusa, quello scienziato (quella persona) che Galileo chiamava con rispetto “il mio maestro”.

Appendice A

Annotazioni sulla trigonometria

I principianti hanno a volte l'impressione che la trigonometria sia una scienza per iniziati: in effetti, alcuni termini mascherano il senso delle cose su cui si ragiona anzichè illustrarlo, e quel complesso insieme di manipolazioni algebriche che va sotto il nome trigonometria può far pensare a qualcosa che abbia poco a che fare con Euclide. Queste impressioni ostacolano l'apprendimento, tanto che sembra auspicabile argomentarne l'inconsistenza. In questa appendice facciamo qualche tentativo in questo senso, che si aggiunge a quelli fatti nel testo.

A.1 Sui termini della tradizione

I simboli adottati per le funzioni trigonometriche in questo quaderno sono gli stessi usati nella letteratura matematica italiana, tranne che nel caso della funzione seno. Per questa funzione facciamo un'eccezione e la indichiamo con

$$\sin\phi \tag{A.1}$$

Questo simbolo può essere considerato l'abbreviazione della parola latina *sinus* o di quella inglese *sine* ed è di uso pressoché universale al di fuori del nostro paese. Invece nelle nostre scuole è più comune usare sen ϕ, che è una abbreviazione della parola *seno*.

L'origine di questa parola è buffissima e credo sia bene conoscerla (vedi anche [18]) siccome nasce da una serie inimmaginabile di equivoci. Si parte della parola sanscrita *jya-ardha* che significa "mezza corda", dove ci si riferisce al senso della geometria euclidea,[1] illustrato p.e. dalla figura 1.4: è la "corda" sottesa da un settore angolare di una circonferenza. P.e., il grande matematico e astronomo Aryabhata spesso abbreviava questo termine in *jya* o nel suo sinonimo *jiva*. Quando le opere indiane furono tradotte in arabo, questa abbreviazione fu trascritta foneticamente nel termine *jiba,* che non ha alcun altro significato che quello matematico in arabo. Ma siccome l'arabo è scritto senza vocali, da al-Bīrūnī in poi le consonanti *jb* vennero lette come *jaib*, che significa "tasca" ma che richiama una scollatura, o uno spacco, ed allude vagamente al "seno femminile". Quando le prime opere arabe di trigonometria vennero tradotte in latino (nel XII secolo) il traduttore Gherardo da

[1] È molto plausibile che a seguito dell'invasione di Alessandro Magno ci furono significativi apporti della cultura greca in India e si istaurarono preziosi scambi.

Cremona perpetuò l'equivoco usando la parola latina equivalente *sinus*, che manteneva il significato di *jaib*, anche se, per estensione, significava "curva" o "piega" (come in una toga sopra un seno), o anche "baia" di un golfo. Questa parola latina è ora diventata il termine comunemente usato in italiano, e le cose sono ancora peggiorate in quanto il significato originario di seno quale "ìncavo" è stato pressoché rimpiazzato dal significato complementare e molto più comune di "prominenza" - ovvero di mammella. Il termine seno non aiuta più a recepire il legame tra le funzioni trigonometriche e la geometria euclidea (pur evidente a livello concettuale). Ci siamo persi in un labirinto di parole, e ci servirebbe il filo di Arianna - o meglio ancora, la corda di Archimede!

Quanto alle funzioni trigonometriche iperboliche, che abbiamo esaminato in App. E, le notazioni originarie usate per le funzioni iperboliche

$$\mathrm{Sh.}\phi \text{ e } \mathrm{Ch.}\phi \tag{A.2}$$

che stanno per *sinus et cosinus hyperbolicus.* Esse venivano usate assieme a Sc.ϕ e Cc.ϕ, che stanno per *sinus et cosinus circular.* Sono simboli graziosi ed evocativi, in quanto mettono in enfasi il forte parallelismo tra le due coppie di funzioni. Ma per non discostarci troppo dall'uso comune, in questo quaderno preferiremo usare le notazioni moderne e scriveremo p.e.

$$\sinh\phi \tag{A.3}$$

per indicare il seno iperbolico.

A.2 Sulla relazione con la geometria euclidea

In questa sezione deriviamo le formule di duplicazione degli angoli (che utilizziamo p.e. nella sezione 1.3.2) nel contesto della geometria euclidea, per illustrare uno dei tanti legami con la trigonometria.

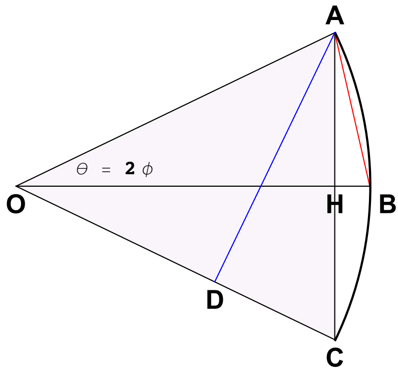


Figura A.1: *Le relazioni tra seni e coseni di angoli doppi possono essere facilmente illustrate nel contesto della geometria euclidea considerando attentamente questo arco di circonferenza ed i segmenti qui evidenziati.*

La figura A.1 mostra un settore circolare. Il relativo angolo sotteso $\widehat{\mathrm{AOC}}$ è bisecato dal segmento $\overline{\mathrm{OB}}$. Vediamo poi il triangolo con vertici O, A, C, (ombreggiato in Fig. A.1) la cui area, per definizione, vale $\mathscr{A}$; naturalmente l'area $\mathscr{A}$ è data dal prodotto della base per l'altezza fratto due.

Però possiamo effettuare il calcolo in due modi diversi. Possiamo usare la base $\overline{\mathrm{AC}} = 2\overline{\mathrm{AH}}$ e l'altezza $\overline{\mathrm{OH}}$, o alternativamente, la base $\overline{\mathrm{OC}}$, di lunghezza unitaria, e l'altezza $\overline{\mathrm{AD}}$ evidenziata in blu.

Concentrandoci sull'angolo $\theta = \widehat{\mathrm{AOB}}$ si nota che

$$\sin\theta = \overline{\mathrm{AH}}, \;\; \cos\theta = \overline{\mathrm{OH}}, \;\; \sin 2\theta = \overline{\mathrm{AD}} \tag{A.4}$$

Dunque, il confronto tra le due espressioni per l'area ci permette di concludere

$$\mathscr{A} = \overline{\mathrm{AH}} \times \overline{\mathrm{OH}} = \sin\theta\cos\theta = \overline{\mathrm{OC}} \times \overline{\mathrm{AD}}/2 = \sin 2\theta/2 \tag{A.5}$$

che ci conduce immediatamente alla prima notissima formula che ci interessa illustrare

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \tag{A.6}$$

Consideriamo nuovamente la Fig. A.1, stavolta ponendo

$$\phi = \theta/2 = \widehat{\mathrm{AOB}}/2 \text{ che implica } \sin\phi = \overline{\mathrm{AB}}/2 \tag{A.7}$$

in altre parole, facendo riferimento al segmento evidenziato in rosso, pensiamo al seno dell'angolo ϕ come ad una 'mezza corda'. Al fine di valutare la lunghezza della corda $\overline{\mathrm{AB}}$ ci basterà applicare il teorema di Pitagora

$$\begin{aligned}(2\sin\phi)^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 &= \overline{\mathrm{AH}}^2 + \overline{\mathrm{HB}}^2 = \overline{\mathrm{AH}}^2 + (1 - \overline{\mathrm{OH}})^2 \\ &= 2(1 - \cos\theta) = 2(1 - \cos 2\phi)\end{aligned} \tag{A.8}$$

Confrontando la prima e l'ultima espressione ed utilizzando poi l'identità $(\cos\phi)^2 + (\sin\phi)^2 = 1$, arriviamo alla formula che ci dà il coseno dell'angolo doppio:

$$\cos 2\phi = (\cos\phi)^2 - (\sin\phi)^2 \tag{A.9}$$

una espressione che, negli studi di trigonometria, risulta tanto familiare quanto la Eq. A.6.

Appendice B

Come maneggiare le equazioni cubiche

B.1 La forma standard

Consideriamo la più generale equazione cubica, con coefficienti numerici (reali) A, B, C, D:

$$AX^3 + BX^2 + CX + D = 0 \tag{B.1}$$

Supponiamo che A non sia zero, altrimenti l'equazione non è davvero cubica. Possiamo allora dividere per A e ponendo $b = B/A$, $c = C/A$ e $d = D/A$, otteniamo l'equazione equivalente

$$X^3 + bX^2 + cX + d = 0 \tag{B.2}$$

A questo punto transliamo la variabile, ponendo

$$X = x + a \tag{B.3}$$

e con un po' di pazienza possiamo riscrivere

$$x^3 + (3a+b)x^2 + (3a^2 + 2ab + c)x + (a^3 + a^2 b + ac + d) = 0 \quad \text{(B.4)}$$

Quindi, scegliendo $a = -b/3$ (perché non farlo?) semplifichiamo un po' l'equazione:

$$x^3 + \left(-\frac{b^2}{3} + c\right)x + \left(\frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d\right) = 0 \quad \text{(B.5)}$$

L'ultimo passo è apparentemente insulso ma ci permette di scrivere l'equazione in un modo molto pulito, con solo due coefficienti numerici. Poniamo infatti per definizione

$$\begin{cases} \left(-\dfrac{b^2}{3} + c\right) = -3P \\ \left(\dfrac{2b^3}{27} - \dfrac{bc}{3} + d\right) = -2Q \end{cases} \quad \text{(B.6)}$$

e arriviamo alla forma dell'equazione cubica usata nel testo (equazione 2.1) che chiameremo *forma standard* per comodità di riferimento

$$x^3 = 3Px + 2Q \quad \text{(B.7)}$$

Come si capisce dai passi appena descritti, la forma standard è equivalente alla equazione cubica generale; si intende che, se conosciamo un valore x che risolve quest'ultima equazione, conosciamo il valore X che risolve quella da cui siamo partiti, siccome i coefficienti numerici sono presunti essere noti.

B.2 Il metodo di soluzione di Vieta

Una geniale scelta delle variabili, merito di Vieta, consente di risolvere *facilmente* l'equazione cubica appena trovata. La sostituzione è la seguente

$$x = y + \frac{S}{y} \tag{B.8}$$

dove S è un numero (che sceglieremo in modo di semplificarci la vita) ed y è una nuova variabile, che assumiamo non valga zero. Usiamo questa sostituzione nella equazione cubica in forma standard (eq. B.7) e dopo un po' di algebra troviamo

$$y^3 + 3(S-P)y + 3(S-P)\frac{S}{y} + \frac{S^3}{y^3} - 2Q = 0 \tag{B.9}$$

È piuttosto evidente che la scelta $S = P$ è molto conveniente, in quanto ci conduce all'equazione

$$y^3 + \frac{P^3}{y^3} - 2Q = 0 \tag{B.10}$$

che è equivalente alla seguente

$$u^2 - 2Qu + P^3 = 0 \text{ dove abbiamo posto } u = y^3 \tag{B.11}$$

Quest'ultima è una equazione quadratica, che sappiamo risolvere! Abbiamo in particolare la soluzione

$$u = Q + \Delta \text{ dove } \Delta = \sqrt{Q^2 - P^3} \tag{B.12}$$

che consente di dedurre $y = \sqrt[3]{u}$ ed infine $x = y + P/y$. Questa è proprio la soluzione riportata nel testo, vedi equazione 2.2.

B.3 Un esercizio di approfondimento

A chi volesse familiarizzarsi con le più utili tecniche di calcolo, può essere divertente svolgere questo esercizio di approfondimento.

Si consideri una equazione cubica della forma eq. 2.1 e per prima cosa ci si convinca che il polinomio $x^3 - 3Px - 2Q = 0$, nel caso in cui $P > 0$ e $Q > 0$, ha una sola radice positiva.

Saremo interessati al sottocaso in cui vale $Q^2 < P^3$, che come discusso in sezione 2.1, prevede che ci siano tre soluzioni reali distinte: le chiameremo x_0, x_+ ed x_-.

1. Convincersi che se si vuole che l'equazione sia nella forma eq. 2.1, deve valere la relazione $x_0 + x_+ + x_- = 0$.
   Suggerimento: espandere il polinomio $(x - x_0)(x - x_+)(x - x_-)$.

2. Mostrare che possiamo definire,

$$x_0 = 2n, \quad x_+ = -n + \sqrt{3}m, \quad x_- = -n - \sqrt{3}m \tag{B.13}$$

   dove n, m sono due parametri. Notare che se $n > \sqrt{3}m > 0$ allora vale la relazione $x_- < x_+ < 0 < x_0$.

3. Si calcolino i coefficienti P e Q in funzione di n ed m. Mostrare che se i due parametri n ed m sono interi ne segue che anche P e Q lo sono e discutere quando risultano essere entrambi positivi.

4. Si mostri con un calcolo diretto che, come ci si aspetta dal ragionamento esposto in sezione 2.1, vale $Q^2 < P^3$; inoltre, in questo caso anche $i \cdot \Delta$ risulta essere un numero intero.

5. Si scriva la formula risolutiva per l'equazione cubica, e si dimostri, grazie alla proprietà appena discussa, che essa assume una forma estremamente semplice.

6. Per capire ancora meglio i risultati, si consiglia infine di cercare di semplificare il termine $Q+\Delta$ della formula risolutiva, confrontandolo con i cubi di $n+i\cdot m$ e di $n-i\cdot m$.

Dopo questo approfondimento, immaginiamo di ripartire da capo, e di prefiggerci lo scopo di introdurre le equazioni cubiche (p.e., a scuola) e i problemi relativi alle loro soluzioni algebriche.

Discutere i vantaggi e gli svantaggi di iniziare presentando i casi corrispondenti a $n=1$ ed $m=1$, oppure a $n=2$ ed $m=1$, oppure a $n=m=1/2$, invece del caso descritto nel testo e definito in eq. 2.4, e che corrisponde a $n=5/2$ ed $m=\sqrt{3}/2$.

Appendice C

Da Tartaglia a Newton

C.1 Il triangolo di Tartaglia

Immagino che a qualcuno sarà capitato di ragionare sul triangolo di Tartaglia,[1] di cui mostriamo le prime 6 righe,

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array} \tag{C.1}$$

[1] Un buffo esercizio che suggerisco è questo: approfondendo con google lo studio degli argomenti presentati in questa appendice, ragionare sulla validità delle legge di Stigler formulata nella nota a pie' di pagina numero 1 del capitolo Cap. 3. (P.e., si possono vedere le denominazioni del triangolo di Tartaglia in altri paesi, i contributi del grande matematico e filosofo Pascal, ecc; ma raccomando anche di investigare i *numeri figuràti* e il *teorema binomiale,* magari usando le funzionalità multilingua di Wiki).

Mentre ai lati di questo triangolo abbiamo sempre degli 1, per trovare un numero della riga successiva basta sommare i due numeri appena sopra di questo. Una volta fissati i valori all'esterno del triangolo (che sono tutti 1) tutti gli altri seguono da questa regola.

I numeri che compaiono nel triangolo vengono identificati della riga n-sima e dal posto m-simo, con l'accortezza di contare a partire da zero:

$$0 \leq m \leq n \ \text{ dove } \ n \geq 0 \tag{C.2}$$

Per indicarli si usano vari simboli in vari contesti ed nei vari paesi

$$\left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right) \text{ oppure } \mathbf{C}_m^n \text{ oppure } F_{n,m} \text{ ecc} \tag{C.3}$$

useremo come regola solo il primo per evitare confusioni.

C.1.1 Formule per i coefficienti del triangolo

C.1.1.1 Una espressione esplicita

Iniziamo con una espressione esplicita di questi coefficienti, data da due prodotti di m-fattori, uno a numeratore ed uno a denominatore

$$\left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots. \cdot (n-(m-1))}{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots. \cdot 2 \cdot 1} \tag{C.4}$$

P.e., per $n = 4$ ed $m = 2$ avremo $\left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right) = 6$. Quando $m = 0$ (o $n = 0$) porremo il denominatore (il numeratore) ad 1.

Invito a mettere alla prova questa espressione chi non la ricordasse bene, e a usarla magari per verificare la proprietà tipica del triangolo di Tartaglia, che abbiamo descritto proprio all'inizio:

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1} \tag{C.5}$$

È facile convincersi che questa proprietà, assieme ai valori prescelti

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \tag{C.6}$$

fissa in modo in modo univoco i coefficienti del triangolo di Tartaglia.[2]

C.1.1.2 Una espressione che usa i "fattoriali"

Una seconda espressione molto utilizzata degli stessi coefficienti è la seguente[3]

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \tag{C.7}$$

che dovrebbe essere facilmente utilizzabile anche da chi la vede la prima volta, usando la definizione del cosiddetto *fattoriale di un numero intero n*. Esso viene indicato con un punto esclamativo apposto al numero, e risulta così definito

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot .... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \tag{C.8}$$

[2] Per chi volesse cimentarsi con la formula data in eq. C.4, vorrei proporre due indovinelli: 1) convincersi che tutti i coefficienti sono numeri interi e non frazionari *(indizio: contare quanti fattori ci sono a numeratore);* 2) assumendo che n sia un numero primo, ed $n > m > 0$, assicurarsi che il coefficiente è divisibile per n.

[3] Invito il lettore a verificare che coincide con l'espressione data in eq. C.4.

Per definizione si conviene che $0! = 1$.

Il fattoriale compare tutte le volte che abbiamo delle scelte da operare; se per esempio dobbiamo ordinare n oggetti (per es. i numeri da 1 fino ad n) le possibilità distinte sono proprio $n!$. Infatti: all'inizio posso scegliere tra n oggetti; al prossimo passo posso sceglierne solo $n-1$ (uno di loro è già stato scelto); ecc. Ci ritorneremo fra un attimo.

C.2 Il binomio di Newton

Ricordiamo a questo punto l'importante *formula del binomio di Newton*, cioè la seguente espressione

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \\ &+ \frac{n\,(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n\,(n-1)\,(n-3)}{3\;2}a^{n-3}b^3 + \ldots.\end{aligned} \tag{C.9}$$

che generalizza la celebre formula del binomio $(a+b)^2$ e che ha come termine generico

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right) a^m b^{n-m} \tag{C.10}$$

Questo risultato è importante, ne diamo allora due distinte dimostrazioni, che evidenziano aspetti diversi - e che ovviamente vanno d'accordo!

1) Consideriamo gli n termini del prodotto $(a+b)(a+b).....(a+b)$, che pensiamo come un polinomio di grado n in a e b. Vediamo quante volte compare il monomio $a^m b^{n-m}$, con $n \geq m$. Esso si forma scegliendo per m volte il fattore a tra n termini, poi ancora il

fattore a tra i restanti $n-1$, ecc.; e poi scegliendo il fattore b tra i restanti $n-m-1$ termini, e così via, fino a concludere le scelte. Abbiamo effettuato $n!$ scelte, ma quello che ci serve è il numero di volte in cui questo monomio compare, ovvero il numero di scelte *diverse*. In effetti, avremmo preso esattamente lo stesso termine se pure le prime m scelte (o le successive $n-m$) fossero state fatte in ordine diverso: non le dobbiamo contare separatamente. Dunque, il numero di volte in cui questo monomio compare è proprio $n!/(m!\,(n-m)!)$. A questo punto basta confrontare con l'equazione C.4: fine della prima dimostrazione.

2) Consideriamo nuovamente il monomio $a^m b^{n-m}$ che compare nel binomio $(a+b)^n$, con un coefficiente che chiameremo $F_{n,m}$. Vogliamo determinare i coefficienti del successivo binomio $(a+b)^{n+1}$ a partire da quelli dei precedenti; un po' come in una scala, l'idea è di fare un passo a partire da quello precedente. Per prima cosa preoccupiamoci dei valori estremi: se $m=0$, stiamo parlando di b^n ed è evidente che il coefficiente sia $F_{n,0}=1$; in modo simile, se $m=n$, stiamo parlando del monomio a^n e di nuovo abbiamo $F_{n,n}$. Ora, consideriamo il caso generico, ovvero il binomio successivo $(a+b)^{n+1}$. Lo possiamo scrivere così: $(a+b)^{n+1}=(a+b)^n\times(a+b)$; in altre parole, otteniamo il successivo binomio moltiplicando il precedente per $a+b$. Il monomio $a^m b^{n+1-m}$ con coefficiente $F_{n+1,m}$ comparirà in due casi; a partire dal monomio $a^m b^{n-m}$ moltiplicato per b e anche a partire dal monomio $a^{m-1}b^{n-(m-1)}$ moltiplicato per a. Quindi, $F_{n+1,m}=F_{n,m}+F_{n,m-1}$, che coincide con la proprietà mostrata nella equazione C.5. È quanto serve per concludere la seconda dimostrazione.

C.3 Alcune formule utili

Ecco alcune applicazioni del binomio di Newton.

Due formule graziose ed utili, che legano tra loro i coefficienti del binomio, sono

$$\begin{aligned} 2^n = (1+1)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \text{ (vale se } n \geq 0) \;; \\ 0 = (1-1)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (-1)^m \text{ (vale se } n > 0) \;. \end{aligned} \tag{C.11}$$

Un'altra formula che ci serve nel testo è è questa

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \frac{1}{n^m} = \\ = \sum_{m=0}^{n} 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) .... \left(1-\frac{m-1}{n}\right) \times \frac{1}{m!} \end{aligned} \tag{C.12}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo fatto due cose 1) abbiamo considerato separatamente il numeratore e il denominatore del coefficiente binomiale; 2) abbiamo combinato i termini del numeratore con quelli di $1/n^m$, il termine che leggiamo nel secondo passaggio. Quando prendiamo il limite per n che tende ad infinito, troviamo a sinistra l'espressione di e dovuta a Bernoulli e a destra quella dovuta ad Eulero.

Appendice D

Una identità trigonometrica

Deriviamo alcune importanti formule - dette formule di Vieta - che forniscono il coseno ed il seno dell'angolo di ampiezza $n\,\theta$ in termini del coseno e del seno dell'angolo di ampiezza θ. Seguendo il percorso storico utilizzeremo solamente i metodi della trigonometria e l'algebra dei numeri reali, proprio come fece François Viète, colui che per primo le ottenne. Poi mostreremo (solo per confronto) quanto sia più agevole derivare queste formule usando le tecniche dei numeri complessi. Infine, useremo le forme di Vieta per per ottenere il seno ed il coseno, come somme di un numero infinito di monomi.

D.1 Derivazione delle formule di Vieta

Introduciamo le abbreviazioni

$$c_n = \cos(n\theta) \text{ e } s_n = \sin(n\theta) \tag{D.1}$$

e porremo anche

$$c = c_1 \text{ e } s = s_1 \tag{D.2}$$

Usando la espressioni per $\sin(a+b)$ e $\cos(a+b)$, abbiamo subito

$$\begin{cases} c_{n+1} = c\ c_n - s_n\ s \\ s_{n+1} = c\ s_n + c_n\ s \end{cases} \tag{D.3}$$

Iniziamo a calcolare un po' di termini; $n = 2$

$$\begin{cases} c_2 = c^2 - s^2 \\ s_2 = 2\ c\ s \end{cases} \tag{D.4}$$

poi $n = 3$;

$$\begin{cases} c_3 = c(c^2 - s^2) - (2\ c\ s)c = c^3 - 3\ cs^2 \\ s_3 = c(2\ c\ s) + (c^2 - s^2)s = 3\ c^2\ s - s^3 \end{cases} \tag{D.5}$$

poi $n = 4$ (omettiamo i calcoli);

$$\begin{cases} c_4 = c^4 - 6\ c^2\ s^2 + s^4 \\ s_4 = 4\ c^3\ s - 4\ s^3\ c \end{cases} \tag{D.6}$$

infine $n = 5$;

$$\begin{cases} c_5 = c^5 - 10\ c^3\ s^2 + 5\ c\ s^4 \\ s_5 = 5\ c^4\ s - 10\ c^2\ s^3 + s^5 \end{cases} \tag{D.7}$$

dove siamo stati attenti ad ordinare i polinomi, anteponendo gli c (i coseni) agli s (i seni). Ora a ben valutare, si nota che:

1. i risultati finali per c_n ed s_n saranno due polinomi di grado n in c ed s (sono inclusi solo i monomi con esponenti non negativi);

2. il polinomio di c_n inizia con c^n mentre quello di s_n termina con s^n;

3. il polinomio di c_n contiene le potenze pari di s, quello di s_n le potenze dispari (quindi i monomi sono spaiati: quelli inclusi nel coseno non sono nel seno e viceversa);

4. per entrambi i polinomi, il primo termine è positivo e poi i segni si alternano;

5. i coefficienti dei monomi sono dei numeri interi

Bene a questo punto ne sappiamo abbastanza per scrivere

$$\begin{cases} c_n = \sum_{m=0}^{2m\leq n} (-)^m F_{n,2m}\, c^{n-2m} s^{2m} \\ s_n = \sum_{m=0}^{2m+1\leq n} (-)^m F_{n,2m+1}\, c^{n-(2m+1)} s^{2m+1} \end{cases} \tag{D.8}$$

dove $F_{n,m}$ sono dei coefficienti positivi con valori $0 \leq m \leq n$ che non abbiamo ancora determinato. In altre parole, l'unica cosa che ci resta da capire è la formula che descrive questi numeri.

Dando uno sguardo all'appendice C, i numeri che appaiono nelle Eq. D.4-D.7 risultano immediatamente familiari. Grazie a questo confronto, possiamo facilmente inferire quali sono le formule di

Vieta a cui volevamo giungere,

$$\begin{cases} c_n = \sum_{m=0}^{2m\leq n} (-)^m \binom{n}{2m} c^{n-2m} s^{2m} \\ s_n = \sum_{m=0}^{2m+1\leq n} (-)^m \binom{n}{2m+1} c^{n-(2m+1)} s^{2m+1} \end{cases} \tag{D.9}$$

Dopo di che, una volta posta una tesi ben definita, diventa molto più agevole verificarne la correttezza.

D.2 Confronto con la tecnica di calcolo che usa i numeri complessi

Si noti che, sin qui, abbiamo usato solo la trigonometria convenzionale, senza far ricorso ai numeri complessi. Lo faremo da questo punto in poi, mostrando quanto sono convenienti queste tecniche di calcolo.

Nella prima delle equazioni D.9 e nel membro di destra riscriviamo $(-)^m s^{2m} = (is)^{2m}$; prendiamo poi la seconda, moltiplicata per i e riscriviamo il membro di destra $i(-)^m s^{2m+1} = (is)^{2m}$. Concludiamo che la somma di $c_n + is_n$ vale

$$c_n + is_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c^{n-k} (is)^k \tag{D.10}$$

dove l'indice di somma k copre sia i valori pari $k = 2m$ che quelli dispari $k = 2m+1$, ed arriva fino ad n. Pertanto, usando la formula C.9 in appendice C, vediamo che il membro di destra può essere riscritto così:

$$c_n + is_n = (c + is)^n \tag{D.11}$$

questa non è altro che la formula di de Moivre già mostrata in equazione 2.17.

Fa una certa impressione notare quanto sia più semplice ottenere tale formula usando direttamente i numeri complessi, come fatto nel testo principale, piuttosto che seguendo la procedura mostrata in questa appendice.[1]

D.3 Seno e coseno come somme infinite

Una interessante applicazione delle formule di Vieta è la seguente. Riscriviamo esplicitamente le formule date in equazione D.9 cambiando variabile e ponendo

$$x = n\ \theta \text{ ovvero } \theta = \frac{x}{n} \tag{D.12}$$

[1]Come utile esercizio di controllo, si suggerisce di espandere la formula di de Moivre per ottenere le formule di Vieta. Altro esercizio: ripetere la dimostrazione usando il *principio di induzione,* ovvero: 1) verificare che la formula D.11 vale per $n = 0$; 2) poi, assumendola vera per un certo valore n, dimostrare che ne segue inevitabilmente il caso $n + 1$ (è più facile da farsi che da dirsi).

dove saremo interessati a tenere fisso x ed a considerare n sempre più grandi. Avremo allora

$$\begin{cases} \cos x = \sum_{m=0}^{2m\leq n} (-)^m \begin{pmatrix} n \\ 2m \end{pmatrix} (\cos\theta)^{n-2m} (\sin\theta)^{2m} \\ \sin x = \sum_{m=0}^{2m+1\leq n} (-)^m \begin{pmatrix} n \\ 2m+1 \end{pmatrix} (\cos\theta)^{n-(2m+1)} (\sin\theta)^{2m+1} \end{cases} \tag{D.13}$$

Come abbiamo discusso in dettaglio nel capitolo 1, quando n diventa molto grande è lecito approssimare $\cos(x/n)$ con 1, mentre approssimeremo $\sin(x/n)$ con x/n. In questo limite, i monomi che vengono sommati nell'espressione D.13 (a parte il segno) si riducono semplicemente a questo:

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{x}{n}\right)^k \tag{D.14}$$

dove $k = 2m$ oppure $k = 2m+1$. Scriviamo per esteso questa espressione

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{x}{n}\right)^k &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1} \cdot \frac{x^k}{n^k} \\ &= 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{x^k}{k!} \end{aligned} \tag{D.15}$$

dove per abbreviare le notazioni ho utilizzato il simbolo del fattoriale di un numero intero n, definito $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1$. Vediamo allora che, quando k è fissato ed n diventa grandissimo, i monomi si semplificano molto riducendosi a $x^k/k!$.

Quindi considerando il limite di n grandissimo o virtualmente infinito, ne segue che il seno ed il coseno coincidono con le seguenti somme infinite (o serie numeriche)

$$\begin{cases} \cos x = \sum_{m=0}^{\infty} (-)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots \\ \sin x = \sum_{m=0}^{\infty} (-)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots \end{cases} \tag{D.16}$$

un risultato in una certa misura inaspettato, ma anche profondo ed estremamente utile, e che invito il lettore a confrontare con l'equazione 3.10.

Appendice E

Seno e coseno iperbolico

In questa appendice, basata su [19], approfondiamo il significato delle funzioni **coseno e seno iperbolico** introdotte da Riccati. Per comodità di riferimento, riportiamo la definizione già data nel testo:

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad , \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \tag{E.1}$$

Evidentemente, queste due funzioni hanno un valore ben definito per ogni valore reale del parametro t, proprio come la funzione esponenziale. Il loro grafico è già stato presentato in figura 3.3; in questa appendice, al fine di familiarizzarci maggiormente con esse, inizieremo studiandole in maggior dettaglio. Successivamente discuteremo il significato del parametro t, che può essere confrontato con il significato del parametro delle funzioni trigonometriche - ovvero, l'angolo.

E.1 Esploriamo il comportamento delle due funzioni

Per prima cosa, conviene notare che invertendo il valore $t \to -t$, la funzione $\cosh t$ resta uguale, mentre la funzione $\sinh t$ cambia segno; in gergo, si dice che la prima funzione è pari, la seconda è dispari. In questo, le due funzioni corrispondono perfettamente al coseno e al seno della trigonometria. Poi, osserviamo che, se $t = 0$, vale $\cosh 0 = 1$ e $\sinh 0 = 0$; anche in questo aspetto troviamo una perfetta corrispondenza.

A questo punto, notiamo che possiamo riscrivere le funzioni iperboliche in modo un po' più semplice introducendo un parametro *reale e positivo* x, definito semplicemente come

$$x = e^t \tag{E.2}$$

Data questa definizione, abbiamo immediatamente

$$\cosh t = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \quad , \quad \sinh t = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) \tag{E.3}$$

Per prima cosa, risulta ovvio che $\cosh t$ è sempre positivo. Inoltre, utilizzando un trucco di algebra, si vede facilmente quale è il suo minimo valore:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= (\sqrt{x})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \\ &= (\sqrt{x})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - 2 + 2 \\ &= \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2 \end{aligned} \tag{E.4}$$

Il primo termine dell'ultima espressione è sempre maggiore di zero, tranne quando $x = 1$, che corrisponde al caso $t = 0$. Quindi, concludiamo subito che $\cosh t \geq 1$, proprio come constatiamo dalla figura 3.3.

Quanto alla funzione seno iperbolico, vogliamo mostrare che essa può assumere qualsiasi valore reale, negativo o positivo, chiamiamolo N. Per convincercene basta essere certi che c'è una ed una sola soluzione alla seguente equazione

$$\sinh t = N \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = 2N \tag{E.5}$$

La seconda espressione equivale all'equazione quadratica

$$x^2 - 2Nx - 1 = 0 \tag{E.6}$$

che ha una soluzione positiva (ricordiamo che x è positivo!) ovvero

$$x = \sqrt{N^2 + 1} + N \tag{E.7}$$

È proprio quello che volevamo mostrare. Lasciamo al lettore dubbioso il divertimento di fare la contro-prova, e a quello curioso di convincersi che il seno iperbolico è una funzione crescente, proprio come il coseno iperbolico ristretto alla regione $t \geq 0$, come risulta dalla figura 3.3.

E.2 Il significato geometrico del parametro t

Quando scriviamo $x = \cos\theta$ e $y = \sin\theta$ sappiamo che θ è l'angolo in radianti misurato dall'origine, o anche il **doppio dell'area del settore circolare**. Infatti, guardando il pannello di sinistra di

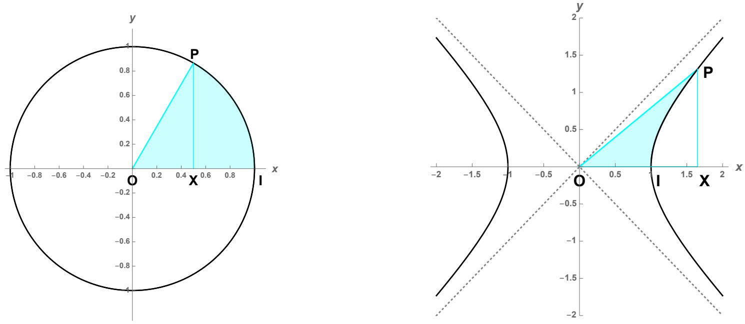


Figura E.1: *Settore circolare (sinistra) ed iperbolico (destra).*

Fig. E.1 e ricordando che stiamo parlando di un cerchio di raggio unitario, l'area del settore delimitato dai punti O, P, ed I non è altro che l'area di un triangolo con base θ ed altezza 1:

$$\theta = 2 \times \text{area OPI} \tag{E.8}$$

La domanda sorge spontanea: quale è il significato geometrico del parametro t nelle funzioni iperboliche? Fu ancora Riccati a dimostrare che si trattava *quasi* della stessa cosa, ovvero, del **doppio dell'area del settore iperbolico** che abbiamo colorato nel pannello di destra di Fig. E.1 che è delimitato dai tre vertici O, P ed I. Per la dimostrazione, useremo in questa sezione le tecniche dell'analisi, e più precisamente gli integrali.

E.2.1 Dimostrazione

Iniziamo calcolando l'area del triangolo OPX. Essa vale $\overline{\text{OX}} \cdot \overline{\text{PX}}/2$; ponendo $\overline{\text{OX}} = X$, l'equazione della iperbole implica $\overline{\text{PX}} = \sqrt{X^2 - 1}$

e dunque

$$\text{area OPX} = \frac{1}{2} X \sqrt{X^2 - 1} \tag{E.9}$$

(vedi ancora Fig. E.1). Per calcolare invece l'area sottesa dall'arco di iperbole dal punto I con coordinate $(1,0)$ al punto X con coordinate $(X,0)$, dovremo calcolare l'integrale

$$\text{area IPX} = \int_1^X \sqrt{x^2 - 1}\, dx \tag{E.10}$$

Effettuiamo la sostituzione $x = \cosh t$. Siccome vale $(\cosh t)^2 - 1 = (\sinh t)^2$ ed anche $dx = \sinh t\, dt$ abbiamo

$$\text{area IPX} = \int_0^X (\sinh t)^2 dt \tag{E.11}$$

dove l'estremo superiore di integrazione è fissato da $X = \cosh t$. Non è difficile convincersi, usando la definizione del seno iperbolico, che vale $(\sinh t)^2 = (\cosh 2t - 1)/2$, e così il precedente integrale si riduce all'integrale di funzioni semplici:

$$\text{area IPX} = \left(\frac{\sinh 2t}{4} - \frac{t}{2} \right) \Bigg|_{t=0}^{X=\cosh t} \tag{E.12}$$

Sempre in stretta analogia con le funzioni circolari, è facile verificare che vale la relazione $\sinh 2t = 2 \sinh t \cosh t$; allora, concludiamo che

$$\text{area IPX} = \frac{1}{2} X \sqrt{X^2 - 1} - \frac{t}{2} = \text{area OPX} - \frac{t}{2} \tag{E.13}$$

e dunque, confrontando con la Fig. E.1, segue immediatamente

$$t = 2 \times (\text{area OPX} - \text{area IPX}) = 2 \times \text{area OPI} \tag{E.14}$$

che è la tesi desiderata.

E.3 Altre curiosità

Le definizioni formali di coseno e seno iperbolico ci consentono di scrivere immediatamente

$$e^t = \cosh t + \sinh t$$

Nell'ultima sezione di questa appendice (indipendente dalle sezioni precedenti) ci chiediamo che succede se consideriamo le funzioni iperboliche per valori complessi, e precisamente se poniamo $t = i\theta$ dove θ è un numero reale - ovvero, come si dice, prendiamo per t un valore 'immaginario puro'. La risposta è banalmente

$$e^{i\theta} = \cosh(i\theta) + \sinh(i\theta)$$

che ci porta a chiederci quale sia il collegamento con le considerazioni esposte nella sezione 4.3. Se - facendo riferimento alla sezione 4.3.2 - confrontiamo le espressioni, date come somme di infiniti termini, del coseno e del coseno iperbolico di valore immaginario; e se poi facciamo lo stesso confronto per il seno e per il seno iperbolico, ci possiamo convincere che

$$\begin{cases} \cos\theta = \cosh(i\theta) = & \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \\ \sin\theta = -i\sinh(i\theta) = & \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

Invito il lettore curioso, a titolo di controllo, ad effettuare altre verifiche.

Se poi volesse, potrebbe provare a fornire una definizione di tangente iperbolica, e investigarne poi le caratteristiche, magari chiedendosi se il nome di 'tangente' è meritato o meno.

Appendice F

I protagonisti principali

Nella tabella qua sotto riportiamo i protagonisti di questa interessante storia, molti dei quali abbiamo già menzionato nel testo.

La tabella inizia con tre matematici del periodo ellenistico, che affrontarono lo studio del pi greco (chi altri l'avrebbe dovuto fare?); tra di essi notiamo p.e., Apollonio che tra le altre cose studiò la geometria delle eliche, in un saggio che purtroppo è andato smarrito nel corso dei secoli.[1]

Il confronto con le radici quadrate di numeri negativi (a cui si avvicinò Erone di Alessandria) divenne necessario nel 1500, e il concetto fu eleborato e chiarito del tutto nei successivi due secoli.

Il numero di Nepero venne introdotto nel 1600... da Bernoulli.

[1] Ma ricorderemo *en passant* almeno la vite di Archimede, un dispositivo ingegneristico che evidentemente presume una solida base teorica.

matematico	nazionalità	periodo	rif.
Archimede di Siracusa	greco	287 - 212a.C.	$*\pi*$
Apollonio di Perga	greco	262 - 190a.C.	(π)
Menelao di Alessandria	greco	70 - 140	(π)
Aryabhata	indiano	476 - 550	(π)
Tartaglia (Niccolò Fontana Tartaglia)	italiano	1499 - 1557	(i)
Cardano (Girolamo Cardano)	italiano	1501 - 1576	(i)
Bombelli (Rafael Bombelli)	italiano	1526 - 1572	$*i*$
Vieta (François Viète)	francese	1540 - 1603	(π,i)
Nepero (John Napier)	scozzese	1550 - 1617	(e)
Galileo (Galileo Galilei)	italiano	1564 - 1642	
Snell (Willebrord Snellius)	olandese	1580 - 1626	π
Cartesio (René Descartes)	francese	1596 - 1650	(i)
Cavalieri (Bonaventura Cavalieri)	italiano	1598 - 1647	
Pascal (Blaise Pascal)	francese	1623 - 1662	
Gregory (James Gregory)	scozzese	1638 - 1675	
Newton (Isaac Newton)	inglese	1642 - 1727	
Leibniz (Gottfried Wilhelm von)	tedesco	1646 - 1716	
Bernoulli (Jacob Bernoulli)	svizzero	1654 -1705	$*e*$
de Moivre (Abraham de Moivre)	francese	1667 - 1754	(π,i)
Taylor (Brook Taylor)	inglese	1685 - 1731	
Cotes (Roger Cotes)	inglese	1682 - 1716	(e,π,i)
Riccati (Vincenzo Riccati)	italiano	1707 - 1775	(e)
Eulero (Leonhard Euler)	svizzero	1707 - 1783	$*e,\pi,i*$
Wessel (Caspar Wessel)	norvegese	1745 - 1818	$*e,\pi,i*$
Argand (Jean-Robert Argand)	svizzero	1768 - 1822	(e,π,i)
Gauss (Carl Friedrich Gauss)	tedesco	1777 - 1855	(e,π,i)
Riemann (Bernhard Riemann)	tedesco	1826 - 1866	
Einstein (Albert Einstein)		1879 - 1955	
de Broglie (Louis V.P.R. de Broglie)	francese	1892 - 1987	
Steenrod (Norman Earl Steenrod)	statunitense	1910 - 1971	

Tabella F.1: Una lista di alcuni dei principali protagonisti dell'avventura intellettuale, culminata nella scoperta e nella comprensione del significato della *formula più bella* mostrata in eq. 4.1.

Infine, fu Eulero a raggiungere il traguardo della ‘formula più bella’ (anche se Cotes ci andò assai vicino, poco prima); da lì partì gran parte della matematica moderna.

Allo sviluppo delle tecniche, che hanno permesso questi progressi, hanno contribuito davvero in tanti: dai pensatori greci ai grandi algebristi del 500; dai fisici filosofi e matematici del secolo successivo per arrivare a Leibniz, Newton e tanti altri che consentirono la fioritura dell’analisi infinitesimale - di cui non parliamo in questo quaderno se non in modo marginale, ed è un peccato[2].

È esaltante seguire il cammino del pensiero matematico lungo i secoli, che pur rinnovandosi e cambiando forma, resta nei secoli fedele a sé stesso.

Ho riportato anche le nazionalità di questi grandi protagonisti, non tanto perché la cosa sia in sé rilevante, quanto per sottolineare il contributo assolutamente meritorio di vari nostri connazionali. Anzi, a ben considerare, anche il primo di questi protagonisti (che pure era di lingua greca) è nato e ha lavorato a Siracusa... Posso essere d’accordo che non sia speciale ragione di orgoglio nascere da una

[2]Ricordiamo che gli inglesi parlano di *calculus* come se questo fosse il calcolo per antonomasia. Ma anche da noi, i matematici del settecento e dell’ottocento si riferivano a queste tecniche matematiche parlando di *analisi sublime* (erano incluse nei programmi scolastici già dai tempi dei licei napoleonici). Andando allo specifico di questo quaderno, la scelta di non approfittare delle tecniche dell’analisi ci ha costretti ad evitare l’espansione di Taylor, anche se ci sarebbero state varie occasioni di ricorrere ad essa. L’ultimo esercizio è solo per chi conosce questo bel risultato, e somiglia ad una caccia al tesoro: propongo di provare a rintracciare tutte queste occasioni nelle pagine precedenti. Potrebbe anche valer la pena di ripercorrere la storia di questo risultato, usando motori di ricerca o libri; arrivando infine alle grandi applicazioni della fisica e della chimica del 900 fino ai nostri giorni, a cui abbiamo appena appena accennato. (E per i più sfegatati, segnalo un ultimo bel libro [20]).

parte o l'altra, ma non mi pare ci si dovrebbe vergognare di essere capitati in un posto tanto caro alla storia della matematica come il nostro paese.

Ringraziamenti

Da qualche anno si è presa l'abitudine di celebrare il 14 marzo, il cosiddetto "giorno del pi greco". È un'usanza carina iniziata dal fisico statunitense Larry Shaw che si è diffusa in tutto il mondo: siccome i paesi anglofoni scrivono prima il mese e poi il giorno, per gli americani non c'è dubbio che il giorno tre-quattordici sia il *pi-day!* Ho avuto il piacere di contribuire ad onorare questa tradizione negli scorsi anni, e lo spunto di questo quaderno mi deriva proprio da una di queste occasioni [21].

Ora che ho finito di mettere in ordine gli argomenti esposti in quel seminario (elaborandoli un po') son proprio contento di averlo fatto, e mi son proprio convinto di alcune cose: 1) che sia un gran peccato non raccontare in classe il metodo di calcolo del pi greco dovuto ad Archimede; 2) che quando si spiega la trigonometria si dovrebbe fare uno sforzo serio per discutere i numeri complessi (invece di limitarsi ai famigerati 'cenni'); 3) che bisognerebbe avere un po' di pazienza quando si definisce il numero e. E per arrivare infine alle cose che come fisico forse capisco meglio, credo che, quando a scuola ci si ripropone di parlare di onde (sonore, luminose, radio o di materia) non sia particolarmente arguto evitare di introdurre e di usare la formula di Eulero. Una via d'accesso agevole per farlo esiste ed è quella che si rifà al linguaggio della geometria euclidea e alle idee di Wessel, come evidenziato in questo quaderno.

Se poi fossi riuscito ad invogliare qualcuno a procedere oltre questa breve introduzione, o a scoprire nuovi canali per reperire informazioni (oltre ai libri che ci vengono proposti/imposti a scuola) sarei andato oltre le mie più folli speranze.

Ringrazio gli amici che si curano di iniziative come il *pi-day* o simili - in particolare Gabriella Ciaffarini, Vittorio Colagrande, Alessandro Della Corte, Grazia Di Lorito, Marcello Lissia, Arturo Sarrantonio, Cristina Tatti, David Vitali, Rosa Zollo - e tutti gli insegnanti che fan parte della commissione scientifica del premio ASIMOV. Ringrazio i numerosi studenti di scuola superiore con cui ho parlato di queste cose, e tutti quelli che volenti o nolenti mi sono stati ad ascoltare. Grazie ad Andrea Cogliati, Giuseppe Scarpino e Tommaso Scozzafava. Sarei onorato di ricevere opinioni, commenti, critiche o correzioni sul materiale esposto. Il mio indirizzo email è vissani@lngs.infn.it

Riferimenti

Il numero π (cap.1):

[1] Un bel libro per chi ama la matematica e volesse saperne di più su Archimede: *Archimede. Un grande scienziato antico*, di Lucio Russo. Edizioni CAROCCI (2019)

[2] *Infinito*, di Umberto Bottazzini, Edizioni IL MULINO, Collana: Raccontare la matematica (2018)

[3] Vedi p.e. la pagina di Wiki dedicata al pi greco; suggerirei di usare sia quella italiana https://it.wikipedia.org/wiki/Pi_greco che quella inglese https://en.wikipedia.org/wiki/Pi

[4] *Le fascinant nombre π*, di Jean-Paul Delahaye, Edizioni DIFFUSION BELIN, Bibliothèque pour la Science (1997), in francese; esiste una versione italiana ma purtroppo è fuori catalogo

[5] *Geometrie senza limiti. I mondi non euclidei*, di Laura Catastini e Franco Ghione. Edizioni IL MULINO, Collana: Raccontare la matematica (2018)

Il numero i (cap.2):

[6] *L'Algebra di Bombelli: nuova trascrizione e commento,* https://amslaurea.unibo.it/3682/1/fulvi_valeria_tesi.pdf, tesi di laurea di Valeria Fulvi, corso di studio in Matematica, università di Bologna (2012)

[7] *Elogio della parola,* di Lamberto Maffei. Edizioni IL MULINO (2018) - vincitore della quarta edizione del premio ASIMOV

[8] *An imaginary Tale. The story of* $\sqrt{-1}$, di Paul J. Nahin. Edizioni PRINCETON UNIVERSITY PRESS (1998)

[9] La pagina Wiki sul numero *i* https://en.wikipedia.org/wiki/Imaginary_unit e anche https://it.wikipedia.org/wiki/Unit%C3%A0_immaginaria

[10] *How to write mathematics,* di N.E. Steenrod, P.R. Halmos, M.M. Schiffer, J.A. Dieudonné. Edizioni AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY (1973)

[11] *On the Analytical Representation of Direction. An Attempt Applied Chiefly to Solving Plane and Spherical Polygons,* di Caspar Wessel (1797) reperibile in rete da http://gymarkiv.sdu.dk/MFM/kdvs/mfm%2040-49/mfm-46-1.pdf

Esponenziali e il numero *e* (cap.3):

[12] *e. The story of a Number,* di Eli Maor. Edizioni PRINCETON UNIVERSITY PRESS (1994)

[13] La pagina Wiki sulla costante *e* https://it.wikipedia.org/wiki/E_(costante_matematica) e anche https://en.wikipedia.org/wiki/E_(mathematical_constant)

La formula più bella (cap.4):

[14] *Tre personaggi della matematica*, di Bruno de Finetti. LE SCIENZE n. 39 (1971). Disponibile online da https://archive.org/details/lescienze-039/page/n37/mode/1up

[15] *Dr. Euler's Fabolous Formula,* di Paul J. Nahin. Edizioni PRINCETON UNIVERSITY PRESS (2006)

[16] *How Euler Did It,* di C. Edward Sandifer. MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA (2007). Versione ridotta disponibile online http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2007-08.pdf

[17] La pagina Wiki sull'identità di Eulero https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_identity (la versione inglese mi sembra un po' più informativa di quella in italiano)

Appendici:

[18] *Ma perché si chiama seno?* di Francesco Vissani. https://www.linkedin.com/pulse/ma-perch%C3%A9-si-chiama-seno-francesco-vissani-phd/

[19] La graziosissima osservazione geometrica dovuta a Riccati descritta in Appendice E è tratta dal bel libro divulgativo sopra menzionato [12].

[20] *The Historical Development of the Calculus*, di Charles Henry Edwards Jr., Edizioni SPRINGER-VERLAG (1982)

Ringraziamenti:

[21] Questo quaderno espande la lezione per il giorno del pi greco 2016 tenuta al liceo *Leonardo Da Vinci*. Le trasparenze di quella lezione sono scaricabile da questo sito https://www.slideshare.net/FrancescoVissani/pi-and-the-most-remarkable-formula-in-mathematics-by-francesco-vissani

Indice delle persone

Quaderni di cultura scientifica

Vol.1, NOV.2019: *Benedetto Croce, la scienza e la scuola*

Vol.2, DIC.2019: *La parola ai premi Nobel: Einstein, Feynman, Gamow*

Vol.3, GEN.2020: *Buon compleanno, Isaac Asimov!*

Vol.4, APR.2020: *La formula più bella (e cosa c'è dietro)*

Vol.5, APR.2021: *Appunti e riflessioni sulla scienza greca*

Vol.6, MAG.2021: *Premio Asimov 2021: le migliori recensioni in Abruzzo*

L'autore, Francesco Vissani, è un fisico in forza ai laboratori nazionali del Gran Sasso da 20 anni, dove si occupa di particelle elementari, specie di neutrini, e del loro ruolo in fisica ed astrofisica.

Ha studiato al Liceo scientifico Galileo Galilei di Macerata (sua città natale), poi si è laureato in fisica all'università di Pisa ed ha infine ottenuto il MSc ed il PhD in fisica teorica presso la SISSA di Trieste.

Ha insegnato a L'Aquila, a Milano, a Catania e a Campinas. Ha lavorato come coordinatore del PhD in fisica astroparticellare al GSSI contribuendo alla sua impostazione.

È un fortissimo sostenitore dell'importanza della cultura e della divulgazione scientifica, ambiti a cui ha contribuito creando il Premio ASIMOV, giunto in Italia alla quinta edizione.

Ha moltissimi amici, una moglie, una figlia e due cani pechinesi.

Pur essendo un lettore quasi onnivoro e alla ricerca di nuove esperienze intellettuali, è ancora un po' sorpreso di essersi infilato nell'avventura dei Quaderni di Cultura Scientifica ma è abbastanza vecchio da capire che *nella vita non si può mai dire.*

per mettersi alla pari con Archimede ci sarà da pedalare

“son detti numeri del piano in contrasto coi numeri della retta”

la geometria fa capolino anche tra gli esponenziali

“senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto”

Quaderni di Cultura Scientifica