Pasquale Catone

IL PIANO INCLINATO, L’ATTRITO E IL CAMPO GRAVITAZIONALE

FEBBRAIO 2004 - SxT Scaffali N°2

Il piano inclinato, l'attrito e il campo gravitazionale..

A cura di Pasquale Catone

Le grandezze fisiche sono concetti misurabili; il rapporto tra la grandezza e l'unità di misura si denomina misura. Le grandezze fisiche possono essere scalari e vettoriali; le prime sono caratterizzate soltanto dal loro valore come la temperatura, il tempo, l'intensità di corrente, la massa, la lunghezza, l'area, il volume, la tensione, l'intensità luminosa, la frequenza, la resistenza elettrica, il calore, il lavoro; le seconde sono specificate dal valore (o intensità o modulo), dalla direzione, dal verso come lo spostamento, la velocità, l'accelerazione, la forza, l'impulso, la quantità di moto, il peso, i campi elettrici, magnetici e gravitazionali. Le grandezze vettoriali vengono rappresentate da vettori, che sono dei segmenti orientati cioè terminanti con una freccia che ne designa il verso. La lunghezza del vettore ne fornisce il modulo in una determinata scala; le rette parallele alla giacitura del vettore ne indicano la direzione. Il vettore può partire da un punto di applicazione oppure può essere libero.

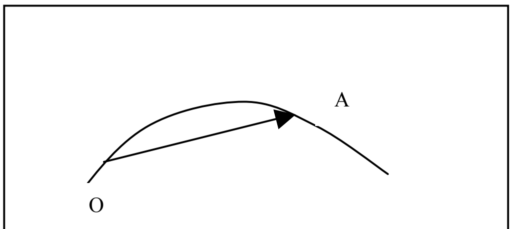


Figura 1

Quando un punto si muove da O ad A, si dice che ha compiuto lo spostamento $\overrightarrow{OA}$ (fig.1). Per spostamento si intende il vettore che unisce la posizione iniziale a quella finale. La conoscenza dello spostamento non ci fornisce informazioni sul percorso, bensì ci permette di sapere la posizione A a partire da quella iniziale O. Se un corpo da O si sposta prima in A e poi in B (fig.2), possiamo asserire che ha compiuto gli spostamenti parziali e consecutivi $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{AB}$, oppure lo spostamento complessivo $\overrightarrow{OB}$. Sia la combinazione degli spostamenti $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{AB}$ che l'unico spostamento $\overrightarrow{OB}$ iniziano da O e terminano in B. Pertanto il sistema dei vettori $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{AB}$ equivale allo spostamento $\overrightarrow{OB}$. Si dice che $\overrightarrow{OB}$ è la risultante oppure la somma vettoriale di $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{AB}$ e si scrive che $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$. Quindi, la risultante di $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{AB}$ si ottiene chiudendo col vettore $\overrightarrow{OB}$ la spezzata OAB. Come gli spostamenti, tutte le grandezze vettoriali si sommano con questa regola del triangolo.

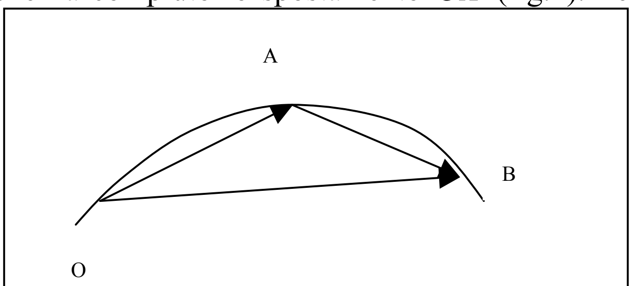


Figura 2

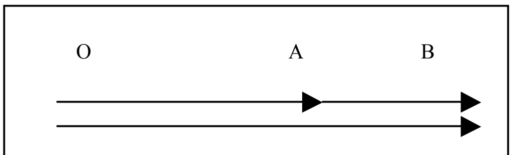
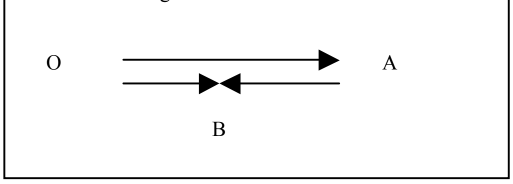


Figura 3

Figura 4



Nel caso di vettori paralleli e concordi (fig.3) si ottiene una risultante $\vec{r}$ orientata come $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ e $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ed avente un modulo pari alla somma delle intensità di $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{AB}$, ossia r = a+b. Lo stesso procedimento ci informa che la risultante $\overrightarrow{OB}$ di due vettori $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ e $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ (con a>b) paralleli e discordi (fig.4) è un vettore orientato come $\overrightarrow{OA}$ con modulo r = a-b. In particolare, la risultante di due vettori opposti è nulla. L'intensità della risultante di

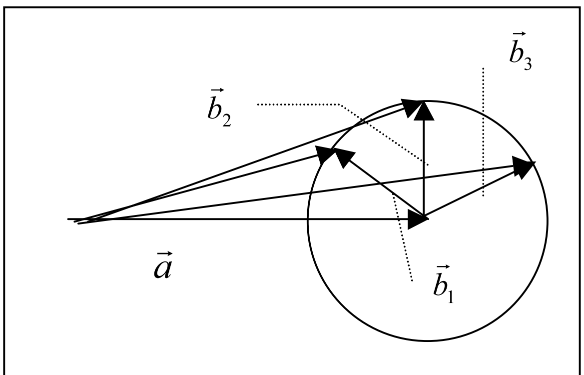
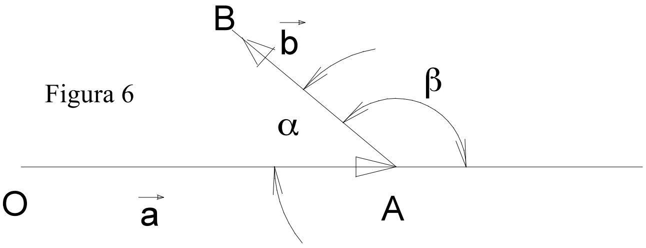


Figura 5

due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dipende dall'angolo che essi formano e dai moduli a e b. Sommando a un vettore fisso $\vec{a}$, i vettori $\vec{b}_1$,$\vec{b}_2$,$\vec{b}_3$,…aventi lo stesso modulo (raggio di una circonferenza), si hanno evidentemente risultanti diverse (fig.5). Quando l'angolo β diminuisce e quindi aumenta α entro l'intervallo [0°, 180°], la risultante deve aumentare (fig.6). Infatti, tirando una cordicella tra O e B, si può osservare che OB cresce con α. Oppure si può ricordare il teorema geometrico per cui in triangoli con due lati ordinatamente uguali che racchiudono l'angolo α, il terzo lato aumenta con α. Quindi il valore minimo del modulo della risultante r = | a-b| , si ha quando α = 0 e cioè quando i due vettori sono paralleli e discordi. Al crescere di α fino a 180°, aumenta la risultante che raggiunge il valore massimo r = a + b per α = 180°, ovvero quando i due vettori si dispongono in modo parallelo e concorde. Se α aumenta oltre 180°, basta prendere in considerazione il suo esplementare e ripetere le osservazioni precedenti. Quindi, la risultante dei due vettori deve sicuramente appartenere all'intervallo che va dal valore assoluto della differenza di a e b alla somma degli stessi, ossia r∈[| a-b | , a+b]; il minimo e il massimo sono associati ai vettori paralleli discordi e concordi. In tutti gli altri casi la risultante avrà un valore specifico, che comunque deve appartenere al suddetto intervallo. Questa limitazione per la risultante si può anche stabilire osservando che in un triangolo t, un lato r è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza, aggiungendo le degenerazioni di t per i vettori paralleli (concordi e discordi).

Figura 6



Se due vettori sono lunghi 3cm e 8cm, r deve appartenere all'intervallo [5cm,11cm]; per esempio, può valere 5cm, 7cm, 10,cm, 11cm, ma certamente non potrà mai essere 2cm o 11,1cm che sono all'esterno dell'intervallo di appartenenza. La risultante di due vettori si può anche trovare con la regola del parallelogramma (fig.7). Basta applicare i due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ nello stesso punto A, completare il parallelogramma con i lati $\vec{a}$ e $\vec{b}$, ricavare la risultante $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$ tracciando la diagonale del quadrilatero uscente da A.

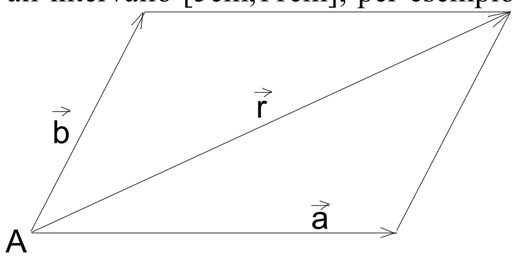
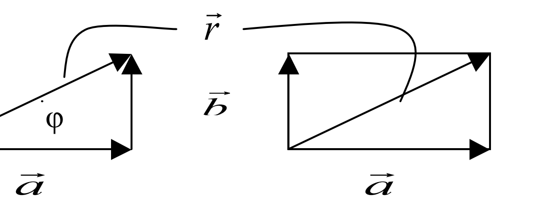


Figura 7

Infatti, col parallelogramma vengono costruiti da bande opposte rispetto ad $\vec{r}$ due triangoli uguali, che riproducono $\vec{r}$ in conformità alla precedente regola di composizione dei vettori. Dai due triangoli si ha $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ e si trae la conclusione che la somma vettoriale obbedisce alla proprietà commutativa, nel senso che il risultato dell'operazione rimane invariato scambiando l'ordine degli addendi.

Adesso esaminiamo altre somme vettoriali:

Figura 8



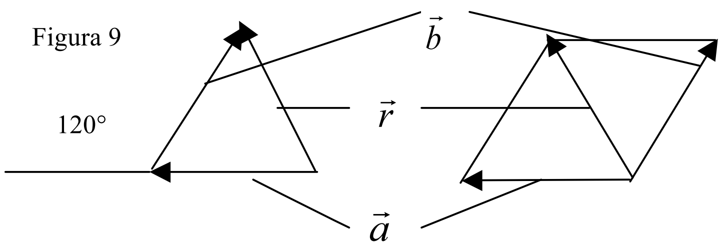
1. *$\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono perpendicolari (fig.8).*

Con il teorema di Pitagora si ha $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; si può risalire all'angolo della risultante rispetto ad $\vec{a}$ applicando la trigonometria: tgφ = b/a.

2. *Angolo tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ di 120° e a = b (fig.9).*

Dai dati si ha che il triangolo è isoscele con l'angolo al vertice di 60°, conseguentemente sono 60° anche gli angoli alla base e il triangolo è equilatero. Allora la risultante forma un angolo di 60° con $\vec{a}$ e $\vec{b}$ ed il suo modulo eguaglia a = b. Pur essendo $\vec{a} \neq \vec{b} \neq \vec{r}$ (i tre vettori sono diversi), si verifica a = b = r (i tre moduli sono uguali). Sembra inaccettabile che sommando due vettori con lo stesso modulo non nullo, se ne possa ottenere un altro che conserva l'intensità dei precedenti; appare, cioè, che l'aggiunta di un vettore $\vec{b}$

Figura 9



non produca variazione rispetto ad $\vec{a}$. Poiché l'uguaglianza r = a = b è valida, in questo esempio, soltanto per il modulo, mentre si verifica $\vec{a} \neq \vec{b} \neq \vec{r}$, bisogna abituarsi a inquadrare il vettore in una visione unitaria che inglobi il modulo, la direzione e il verso per evitare di incorrere in gravi errori. Per inciso si può stabilire che $r = a \in [|a-b|, a+b] = [0, 2a]$. Con due vettori di ugual modulo a, la risultante non solo può avere intensità a, ma può assumere tutti i valori compresi tra 0 (vettori opposti) e 2 a (vettori paralleli e concordi).

3. $a = b$ ed angolo tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ di 60° (fig.10).

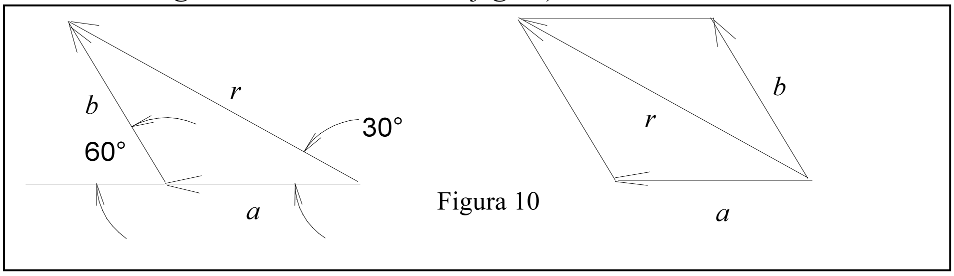
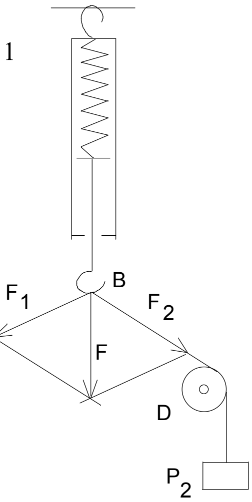


Figura 10

La risultante è $r = 2a \cos 30° = a\sqrt{3}$ e si verifica che $r \in [|a-b|, a+b] = [0, 2a]$.

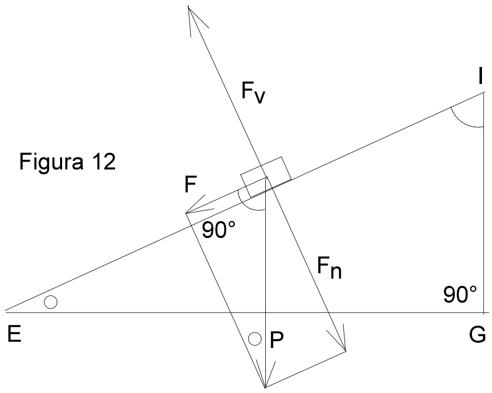
Le forze sono grandezze vettoriali e si compongono con la regola del parallelogramma; questo risultato si può verificare adoperando un dinamometro (strumento di misura delle forze) formato da una molla elastica, fissata per un estremo ad una base interna di un astuccio trasparente sulla cui superficie esterna è segnata la scala graduata. L'altro estremo della molla termina con un dischetto, che serve per indicare la misura, e con un filo al cui gancio si applica la forza. Lo strumento viene appeso ad un morsetto di sostegno mediante un secondo gancio (fig.11). La direzione verticale di due pesi P_1 e P_2 lungo due fili può essere deviata con l'ausilio di due carrucole C e D. Così è possibile applicare al punto B del dinamometro due forze note $F_1=P_1$ ed $F_2=P_2$ in direzioni oblique. Il dinamometro si dispone nella direzione e nel verso della risultante F e ne segnala la sua intensità. Naturalmente si devono spostare le carrucole per avere un assetto verticale del dinamometro in modo che il suo peso non alteri l'esito dell'esperienza. Si riportano su un foglio di carta le forze F_1 e F_2 in modulo, direzione e verso e si costruisce la risultante F con la regola del parallelogramma. Si misura la lunghezza della risultante e si tiene conto della scala usata per ottenerne il modulo, che deve concordare col valore letto sul dinamometro. Il disegno situato dietro i fili deve pure confermare sperimentalmente i risultati grafici sulla direzione e sul verso della risultante.

Figura 11



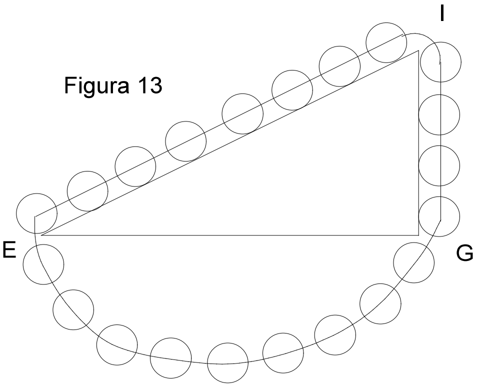
Un corpo adagiato su un piano inclinato senza attrito è sottoposto al suo peso P e alla reazione F_v del vincolo perpendicolare al piano stesso (fig.12). Il peso si può scomporre nelle componenti F e F_n aventi le direzioni parallela e perpendicolare al piano. La F_n viene annullata dalla reazione F_v e sul corpo agirà soltanto la forza F. Poiché F e P sono vettori paralleli nell'ordine a EI e IG, gli angoli segnati con un arco sono uguali. Anche gli angoli di 90° sono uguali, come pure lo sono gli angoli distinti con un cerchio in quanto lo somma degli angoli interni in un triangolo è sempre 180°. Quindi, il triangolo delle forze e il piano inclinato sono simili, avendo gli angoli uguali e si può scrivere la proporzione F:H = P:L, dove H = IG e L = IE. Allora la forza F = HP/L è proporzionale direttamente al peso e all'altezza del piano ed inversamente all'ipotenusa del piano. In particolare per H = 0, il piano diventa orizzontale e la F si annulla, mentre quando H = L il piano si dispone in verticale e la F si identifica col peso P. Si desume che sul dispositivo si può sfruttare un forza utile crescente da 0 a P, aumentando l'inclinazione del piano dalla posizione orizzontale a quella verticale.

Figura 12



Agganciando il corpo al dinamometro, accomodato parallelamente al piano inclinato, si può verificare la formula di F al variare di H, P, L e ciò rappresenta un ulteriore ratifica della composizione vettoriale delle forze.
Il fisico fiammingo Stevino (1548 – 1620) giunse alla comprensione del piano inclinato esaminando la situazione riportata in fig.13. Egli immaginò di sistemare sul piano inclinato una catena di dischi uguali. Poiché la catena rimane ferma e la parte EG ha una forma simmetrica, risulta che le porzioni EI e IG si fanno equilibrio. Siccome i pesi F e P di GI ed EI sono proporzionali ad H ed L, discende la formula del piano inclinato: F/P = H/L, essendo F la forza che equilibra il peso del corpo disteso sul piano stesso.

Figura 13



Lo spostamento del corpo sul piano inclinato è tanto più vantaggioso quanto minore è la sua pendenza. Dunque, per innalzare un carico ad una certa quota conviene farlo salire sul piano inclinato anziché nella direzione verticale. Per esempio, le strade di montagna vengono realizzate con i tornanti per abbassare la pendenza riducendo la forza. Inoltre, si ipotizza che per trasportare i blocchi pesanti per la fabbricazione delle piramidi egiziane furono costruiti dei percorsi a forma di piano inclinato.
L'uso del piano inclinato risulta conveniente per la forza da impegnare, ma è svantaggioso per lo spostamento da compiere. Però in assenza di attriti il lavoro, dato dalla forza tangente al tragitto per lo spostamento, sia in verticale che sul piano inclinato, rimane invariato perché FL = PH. In verticale è maggiore la forza e minore lo spostamento, sul piano inclinato si riduce la forza e cresce il percorso. Sul piano inclinato non si guadagna nessun lavoro, anzi in presenza di attrito si hanno delle perdite energetiche. Tuttavia, in varie circostanze non interessa la quantità di lavoro da espletare, ma la possibilità di attuarlo con la diminuzione della forza.
Il peso sul piano inclinato si può scomporre in direzioni diverse dalle scelte precedenti; per esempio, si può facilmente ricavare che F = H P /B, dove B = EG, scindendo il peso nelle direzioni perpendicolare al piano e parallela alla base B.
Il piano inclinato ebbe con Galilei un ruolo eccezionale nella spiegazione del moto accelerato dei gravi. A quei tempi non esistevano i cronometri sensibili per registrare la discesa di un oggetto in funzione del tempo. Ecco che Galilei pensò di rallentare il movimento di una biglia facendola rotolare sul piano inclinato e misurando il tempo con un orologio ad acqua. Egli trovò che raddoppiando, triplicando, quadruplicando il tempo, lo spazio percorso dalla sfera, inizialmente ferma, veniva moltiplicato per 4, 9, 16.
Nei laboratori scolastici possiamo osservare agevolmente il moto di una slitta su una guida a cuscino d'aria. Questo apparecchio è un profilato rettilineo a sezione triangolare in cui viene insufflata dell'aria da un compressore. L'aria uscendo velocemente dai forellini praticati sulla superficie della guida, solleva leggermente la slitta che allora può muoversi con attrito trascurabile. Inclinando la guida, si ottiene un moto della slitta uniformemente vario, ovvero con accelerazione costante "a", in cui lo spazio percorso è $s = a\, t^2/2$, se l'oggetto era inizialmente fermo. Anche per la slitta lo spazio è proporzionale al quadrato del tempo t. Se lasciamo scivolare due slitte di diversa massa, a contatto nell'istante iniziale, esse continueranno a viaggiare unite. Se allora le velocità delle slitte sono uguali in un dato istante, lo saranno anche successivamente. Scaturisce che le slitte hanno la stessa accelerazione a prescindere dalla massa. Accentuando la pendenza del piano, l'accelerazione si eleva, ma rimane comunque indipendente dalla massa. Il risultato estrapolato per la guida verticale, consente di concludere che il moto di caduta dei gravi senza la resistenza dell'aria avviene con la stessa accelerazione, qualunque sia la massa del corpo. Il valore di tale accelerazione, al livello del mare e alle nostre latitudini, è di 9,8 m/s^2.
L'accelerazione lungo il piano inclinato, in base al secondo principio della dinamica, vale a = F/m = HP/(mL) = Hg/L, dove m è la massa del corpo e P = mg. Quindi "a" è ridotta rispetto al valore di g e indipendente dalla massa. In effetti, una massa superiore è soggetta ad una forza maggiore, però anche l'inerzia (ossia la resistenza alle accelerazioni) è più grande e alla fine l'accelerazione rimane invariata.

Allorché l'oggetto fermo si lascia andare su una tavola a cuscino d'aria inclinata, anziché sulla guida, il moto si svilupperà lungo la retta di massima pendenza del piano perché così risulta diretta la componente F del peso (fig.14). Il lancio del corpo in altra direzione produrrà una traiettoria di forma parabolica, similmente al moto dei gravi scagliati in direzione diversa dalla verticale.

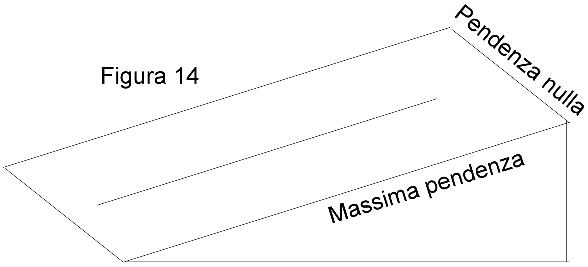


Figura 14

Newton comprese l'interazione fra due masse dal moto della luna e dei pianeti. Egli stabilì che tra due masse puntiformi m_1 e m_2 agisce una forza di attrazione proporzionale al prodotto delle masse e all'inverso del quadrato della loro distanza r e diretta lungo la loro congiungente. La forza gravitazionale può essere utilmente descritta col concetto di campo. In generale, in una zona dello spazio diciamo che esiste un campo, se in ogni suo punto è definita una specifica grandezza. Nell'atmosfera vi sono campi di temperatura e pressione perché in ogni suo punto sono definite tali grandezze. In un campo di forza si stabilisce una sollecitazione sul corpo di prova allocato nelle varie posizioni. Possiamo immaginare che un insieme di sorgenti emana un campo che si diffonde nello spazio. Un corpo esploratore ne rivela la presenza perché sollecitato da una forza. Il campo è generato dalle sorgenti ed esiste a prescindere dal rivelatore. Per questi motivi il campo gravitazionale deve dipendere dalle sorgenti e non dal corpo di prova. Partiamo dalla massa puntiforme M che diffonde nello spazio un campo gravitazionale. Poniamo nello spazio una massa di prova m; su m agirà la forza attrattiva gravitazionale $F = G\ Mm/r^2$, dove G è la costante di gravitazione universale. Siccome F è proporzionale ad m e noi vogliamo costruire un concetto indipendente da m, definiamo come campo gravitazionale la quantità $\vec{\mathbf{g}} = \vec{\mathbf{F}} / \mathbf{m}$, per cui $g = GM/r^2$ è proporzionale alla massa che lo produce e all'inverso del quadrato della sua distanza. I campi gravitazionali di più sorgenti si sommano vettorialmente, il campo esterno ad un corpo sferico omogeneo è uguale a quello che si avrebbe concentrando tutta la massa nel suo centro, il campo in vicinanza della terra è quasi uniforme.

Le masse che compaiono nella legge di gravitazione universale sono dette gravitazionali perché possiedono la proprietà di attrarre. La massa presente nel secondo principio della dinamica viene chiamata inerziale perché indica una resistenza alle accelerazioni. Un corpo nel campo di gravità ha l'accelerazione $a = F/m_i = m_g\ g\ /m_i$, dove m_g ed m_i sono le masse (gravitazionale ed inerziale). Il fatto che l'accelerazione di gravità e il campo gravitazionale siano indipendenti dal corpo, assicura che il rapporto m_g / m_i è costante per qualsiasi oggetto. Assegnato il valore di 1kg alle due masse (gravitazionale ed inerziale) del campione del Kg, il rapporto m_g / m_i sarà sempre 1 per tutti i corpi. Ne segue che la massa gravitazionale di ogni corpo è uguale a quella inerziale. Questo risultato che era considerato una questione accidentale, fu interpretato da A. Einstein col principio di equivalenza tra campo gravitazionale ed accelerazione del sistema di riferimento.