Estratto da RUDI MATHEMATICI N. 83

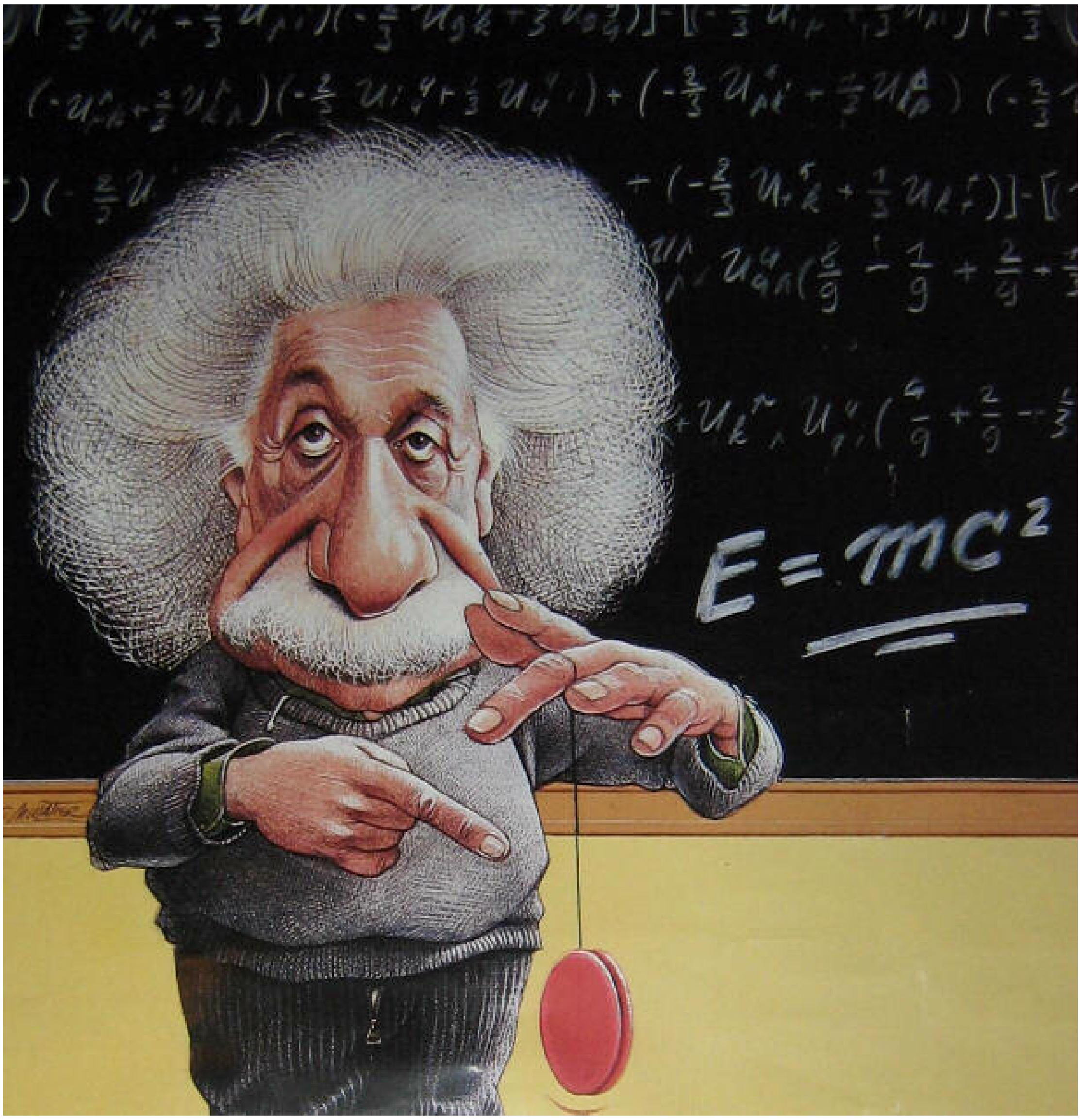
QUINTUN NON DATUR

LUGLIO 2006 Sxt-Scaffali N. 3

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 083 - Dicembre 2005 - Anno Settimo



Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovich Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM 082 ha diffuso ***817*** copie e il **28 novembre** alle **14:53** per Google eravamo in **784** pagine.

"*Annus Mirabilis*".

1. Quintum Non Datur

V) Se una retta, incontrandone altre due,
forma con queste da una medesima parte
angoli interni minori di due angoli retti,
allora tali due rette, infinitamente prolungate,
da questa stessa parte finiranno con l'incontrarsi

(Euclide – "Elementi" – Libro I – Postulati)

Negli atlanti storici si scoprono confini incredibili, e nazioni senza popoli.

Ad esempio, si possono scoprire piccoli scontri di frontiera esplosi sul confine russo-spagnolo, per quanto possa sembrare impossibile che una simile frontiera sia mai esistita: ma nel 1812, quando la costa occidentale del Nord America era ancora indecisa e si estendeva dalle propaggini settentrionali del Messico spagnolo su fino alle coste più meridionali della russa Alaska, appena a nord di San Francisco si poteva trovare Fort Ross, e "Ross" era proprio nome che discendeva da "Russia". Oppure, pur rimanendo nella vecchia Europa, si può ritrovare un regno lungo, sottile e caduco, incredibilmente situato ad ovest della Germania ed ad Est della Francia. Dal mare d'Olanda scendeva a coprire tutta la fascia del Reno, scavalcava le Alpi, invadeva l'Italia e racchiudeva al suo interno anche Roma. Correva allora il nono secolo dopo Cristo e Aachen, di quel regno degna capitale, si chiamava ancora Aquisgrana: non era ancora città tedesca schiacciata su una selva di linee di confine (un po' di Germania, un po' d'Olanda, con il Belgio e il Lussemburgo dietro l'angolo e la Francia, come al solito in questi paraggi, vicina e onnipresente), ma, al contrario, era baricentro e cuore del giovane e instabile Impero dei Franchi. E quello strano regno centrale, che proprio dell'Impero manteneva il nome, aveva il compito di salvaguardare l'unità imperiale e le due imperiali capitali: Aquisgrana, come centro politico e regale, e Roma, come centro indissolubile dell'impero religioso.

Era costume dei Franchi dividere nelle successioni i possedimenti paterni fra tutti i figli eredi: e se il destino aveva deciso che, nonostante la pletora di figli, Carlo Magno dovesse infine trasmettere il suo impero integro e indiviso al figlio Ludovico, quest'ultimo non sfuggì invece alla tradizione frammentante. Prima di morire diligentemente suddivise il giovane Sacro Romano Impero in tre regioni, una per ogni figlio: da una parte la Francia, destinata a Carlo il Calvo; dall'altra parte la Germania, regno di Ludovico II, non per niente soprannominato "il Germanico". In mezzo rimaneva proprio la terra dotata di titolo imperiale e di due capitali; era destinata a Lotario, l'erede imperatore. Di quel regno, l'unica cosa che durerà davvero a lungo sarà il nome: è da Lotario che infatti discende la dizione "Lotaringia", o, per dirla più correttamente, il "Lotharii Regnum". Ed è attraverso questo termine e alla sua contrazione franca che si arriva a "Loherrègne", ovvero a quella che ancora oggi si chiama "Lorena". Una tormentata regione che per secoli, insieme alla consorella Alsazia, ha continuato ad oscillare nei destini e nei confini ora tedeschi, ora francesi.

Solo due generazioni erano bastate a frantumare in possedimenti piccoli e dispersi il grande Sacro Romano Impero di Carlo Magno: e sì che proprio sotto il regno del fondatore dell'impero si arrivò davvero vicini alla costituzione d'un gigantesco soggetto politico. Dall'altra parte del Mediterraneo, all'inizio del nono secolo, splendeva ancora fulgente la gloria dell'Impero Romano d'Oriente e, per uno dei capricci della storia, a Bisanzio governava una donna bella e decisa, proprio mentre in occidente Carlo era nuovamente rimasto vedovo di una delle sue molte mogli. La romana imperatrice Irene e il romano imperatore Carlo si studiarono da lontano, e l'ipotesi d'un matrimonio doppiamente imperiale venne seriamente presa in considerazione. Non si concluse nulla, però: e l'Impero Romano di Bisanzio proseguì la sua storia per altri sei secoli, mentre il Sacro Romano Impero rimbalzò per l'Europa per un altro millennio, disgregando nazioni più di quanto riuscisse ad aggregarle.

E' curioso notare come, pur già a distanza di secoli dalla caduta dell'Urbe, l'aggettivo "romano" fosse ancora merce così preziosa, nella denominazione d'un dominio imperiale. La gloria millenaria di Roma era ancora intatta e senza pari, e ogni potente voleva in qualche modo riallacciarsi a quella potenza inarrivabile, almeno nel nome. Non che Irene e Carlo non avessero diritti reali: l'impero bizantino era davvero l'erede orientale delle aquile delle legioni romane; e Carlo Magno, da par suo, era stato incoronato da papa Leone III come Imperatore dei Romani direttamente in San Pietro, quindi sia l'aggettivo "sacro" che quello "romano" avevano la loro ragione d'essere. Ciò non ostante, esiste anche una ragione più sottile e non meno importante per rimarcare la "romanità" degli imperi medievali: ed è ragione nascosta nei Testi Sacri. Nella Bibbia si ritrova infatti la "visione di Daniele", che ammonisce: "*Figlio dell'Uomo, comprendi bene. Questa visione riguarda il tempo della fine*" (Daniele 8,17). E' una visione che narra di quattro bestie; un leone, un orso, una pantera e una bestia terribile e senza nome: secondo Daniele, le quattro bestie rappresentano gli imperi della Terra; nell'ordine corrisponderebbero pertanto all'impero babilonese, a quello dei Medi[1], al persiano e infine l'ultimo – innominabile – all'impero greco proprio dei tempi di Daniele stesso. Questa celebre visione venne però in seguito riadattata e rivista, e per quasi tutta l'epoca cristiana l'interpretazione cambiò secondo quello che veniva chiamato "sistema romano": il primo impero restava quello di Babilonia, ma il secondo riuniva sotto una sola voce quello medio e persiano; il terzo riguardava il dominio greco, da Alessandro il Grande fino ai successori Seleucidi e Lagidi, e finalmente l'innominabile quarto diventava il travolgente impero di Roma. Non è variazione di poco conto, nella lettura profetica: innanzitutto riportava nella cronaca quotidiana la profezia, cosa che non poteva essere più realizzata dalla vecchia interpretazione che terminava con il dominio dei Greci; in secondo luogo, stabiliva che l'Impero Romano deve essere inevitabilmente l'ultimo della Terra. Le Sacre Scritture non possono sbagliare, e nessun altro impero dopo quello di Roma viene citato: di conseguenza, per un re cristiano, è possibile solo "risuscitare" l'impero romano, e non fondarne uno nuovo.

"Quintum non datur" si potrebbe dire, parafrasando un principio della logica aristotelica, e il comandamento sembra valere non soltanto per gli imperi di questa Terra. Fu proprio Aristotele a sistemare definitivamente la "chimica" greca: come già fece Empedocle prima di lui, prese l'Acqua di Talete, il Fuoco di Eraclito e ad essi aggiunse Terra ed Aria, restringendo così il numero degli elementi costituenti a quattro soltanto: una tavola periodica decisamente più facile da ricordare di quella di Mendeleev. Non che fosse che per questo ovvia o banale: le relazioni che governavano gli Elementi erano comunque ispirate dall'osservazione della natura e dall'idea che dovesse esistere una simmetria fondante. Ogni elemento possedeva due delle quattro caratteristiche fondamentali (Caldo Freddo Secco Umido): ad esempio la Terra era Fredda e Secca, mentre il Fuoco è Caldo e Secco. Gli elementi erano a coppie pesanti[2] (Terra-Acqua) o leggeri (Fuoco-Aria), e così via. Il numero quattro consentiva combinazioni simmetriche e sufficienti alla composizione d'una cosmologia: e una tale eleganza numerica non era cosa d'importanza trascurabile nella Grecia antica. In fondo, è proprio quella terra ove Pitagora predisse la scoperta d'un Quarto Continente oltre ai noti Europa, Asia e Africa, per mere ed estetiche ragioni di simmetria.

Talvolta, però, è difficile far quadrare i conti, anche se solo di conti filosofici si tratta. I quattro elementi non bastano a descrivere l'intero universo: Aristotele guarda il cielo e tutto quanto è di natura celeste, e decide che la materia che compone il cielo non è derivabile dai quattro elementi noti. Deve esserci un "*pempton stoicheion*" un "Quinto Elemento"[3] diverso dagli altri, per poter costruire il cielo: e proprio da qui prende il via la lunga separazione tra natura celeste e natura terrena degli enti, separazione che sarà risolta solo quasi duemila anni dopo lo Stagirita, per mezzo della rivoluzione copernicana. Nel tardo latino medievale, il quinto elemento aristotelico diventa la "*quinta essentia*", ovvero la quintessenza che ancora abita i nostri dizionari. Il significato corrente attuale è "… ciò che è di più raffinato in qualche cosa", proprio perché la natura etere della quintessenza celeste era immaginata essere pura, sottile e impalpabile".

C'è comunque sempre la traccia di una rottura di simmetria, quasi l'introduzione di una eccezione, d'una anomalia, se si deve rinunciare all'equilibrata pace del quattro per tuffarsi nella spigolosa

[1]Impero che non ha una grande presenza storica, a dire il vero.

[2] "Pesanti", ovvero "gravi". E la legge della "caduta dei gravi" riguardava appunto solo quei corpi "naturalmente gravi", aristotelicamente composti soprattutto di Terra e Acqua. Il Fuoco e l'Aria (e presumibilmente i loro derivati) erano invece corpi "naturalmente lievi", niente affatto sottomessi alla legge di "gravità".

[3] L'omonimo film di Luc Besson con Bruce Willis e una strepitosa Milla Jovovich non si allontana troppo dall'etimologia originaria. Alla fine, seppure in una visione un po' troppo melensa, si scoprirà che il misterioso Quinto Elemento salvatore del mondo non è altro che l'amore. Morale e finale quasi identico al primo "Matrix", quasi come se tutta la fantascienza hard di fine secolo non vedesse alternative alla deriva romantica e sostanzialmente antitecnologica.

disparità del cinque. Lo stesso termine "quintessenza" è di recente tornato ad abitare i libri di fisica dal quale era stato cacciato via in epoca rinascimentale, e sempre a causa d'un mistero cosmico.

La cosmologia è una scienza misteriosa, legata com'è a molti modelli e ad un unico oggetto di studio; questo comunque non implica che sia necessariamente statica o noiosa, ma soltanto che è estremamente difficile fare degli esperimenti con essa. E, forse proprio a causa di questo vincolo, nella cosmologia trovano spazio spesso delle teorie d'avanguardia, quando non decisamente ardite. Il punto centrale del dibattito è sempre il medesimo: nella sua forma cosmologica è vecchio di circa cento anni, mentre nella sua forma più generale ha già qualche secolo, e può riassumersi nella semplice domanda "E' il nostro universo piatto?". Naturalmente l'aggettivo "piatto" va inteso in senso fortemente tridimensionale, e corrisponde di fatto al termine "euclideo". Se la risposta fosse "No", allora sapremmo che il nostro universo è "curvo", anche se quest'informazione non potrebbe non essere considerata ancora incompleta. E' una curvatura positiva, che conduce ad un universo Chiuso? O è invece negativa, tale da prospettare un universo definitivamente Aperto?

Prima dei cosmologi relativistici, furono i semplici geometri euclidei a porsi la domanda, ma i termini della risposta sembrano oggi viaggiare su considerazioni fisiche e non più meramente geometriche. Dalla curvatura dell'universo sembra infatti dipendere anche la sorprendente accelerazione cui è sottoposto, e la determinazione delle grado di curvatura diventa di conseguenza ancora più significativa. In ultima analisi, la curvatura dell'Universo sembra dipendere dal bilancio globale tra massa ed energia, e i conti, anche in questo caso, faticano a tornare. Ipotesi fantascientifiche si susseguono e vengano ripetutamente sottoposte a verifica: Materia Oscura, Ipotesi Inflattiva, costante di Hubble "costantemente" modificata… Tutto è in fondo riconducibile alla "lambda" di Einstein, la costante introdotta malvolentieri nelle equazioni della Relatività Generale per giustificare la "staticità " dell'Universo, quando questa staticità sembrava essere condizione indispensabile per una cosmogonia di inizio Novecento. Prima introdotta e poi rinnegata, la "lambda" sembra adesso tornare alla ribalta con significati abbastanza imprevisti: secondo alcuni teorici connoterebbe la "Dark Energy", l' "Energia Oscura", dalle caratteristiche quanto mai interessanti. Si ipotizza infatti che per questa tenebrosa materia-energia la gravità abbia direzione repulsiva, e non attrattiva come siamo abituati a conoscerla nella nostra materia ordinaria: e quest'inversione del segno della gravità potrebbe giustificare l'altrimenti inspiegabile accelerazione dell'Universo, e anche il suo destino segnato verso una curvatura "aperta". Energia oscura, Massa oscura, nomi evocativi che sono infine stati congelati proprio nel desueto termine aristotelico: Quintessenza. E' sempre molto difficile comprendere la consistenza di ipotesi scientifiche così rivoluzionarie quando sono così recenti: A quanto sembra, misurazioni della radiazione cosmica di fondo (CMB: Cosmic Microwave Background) porterebbero a concludere che l'Universo sia composto per il 4% dei "ordinaria materia barionica" – cioè quella che ci è più familiare – mentre il 26% sarebbe "materia oscura fredda (Dark Matter)". Resterebbe pertanto addirittura un rotondo 70% per la "Dark Energy", ovvero per la Quintessenza: una distanza profonda tra la materia celeste e materia terrestre sembra tornare in auge, e il recupero del termine sembra davvero giustificato[4] nella pienezza del suo originale significato aristotelico.

Il salto da quattro a cinque sembra essere sempre traumatico. E chissà che, per una volta, il peccato originale non sia davvero di origine matematica. Un solco profondo tra il quarto ed il quinto elemento d'una breve lista è stato scavato ventitre secoli fa da Euclide, quando nelle prime pagine del Primo Libro dei suoi "Elementi" inserisce un postulato che, rispetto ai primi quattro, stona quanto una cornamusa in un quartetto d'archi. Il Quinto Postulato – detto anche "delle Parallele" – appare infatti artefatto, complesso: peggio ancora, sembra proprio "dimostrabile", che è insulto supremo per ogni postulato che si rispetti. E' stato scritto e riscritto, riformulato, espresso in cento forme diverse e tutte equivalenti: la forma originale[5] di Euclide è quella che campeggia sotto il titolo di questo articolo, e obiettivamente non appare essere una "verità evidente", come il nome "postulato" richiede[6]. Non è

[4] Anche perché è già pronta una buona "exit strategy": se tutta la teoria si rivelasse sbagliata, si può sempre ricordare che Quintessenza è anche una regina del "Gargantua e Pantagruel" di Rabelais, e farsi una risata liberatoria.

[5] Beh, lingua a parte, naturalmente.

[6] Non è un caso se colui che chiede un'elemosina o anche solo attenzione si chiama "postulante": la parentela con "postulato" c'è, ed è strettissima. La dialettica è pur sempre un duello verbale, e inizia proprio con due avversari che logicamente si fronteggiano: il "postulato" è quanto si sa di poter postulare - ovvero "chiedere" - all'avversario, perché questo non farà fatica ad ammetterlo tanto evidente è la sua verità; e naturalmente non sarà richiesta per esso una logica dimostrazione.

questione di modestia intellettuale o di scarsa agilità mentale dei contemporanei di Euclide: si fa sempre un gran parlare del Quinto, ma perché non provare a dare uno sguardo ai primi quattro? E' un'esperienza niente male, soprattutto dopo essersi persi nei formalismi rigorosi del ventesimo secolo…

I) Si può tirare un segmento da un punto all'altro

Forse occorre precisare che per "segmento" Euclide intende "segmento di linea retta", e che questo è stato correttamente definito nelle prime pagine degli Elementi. Ugualmente è stato definito il punto, e di conseguenza il postulato è davvero ad un tempo elementare e misterioso. Elementare perché è davvero intuitivo comprendere cosa Euclide intende: misterioso perché viene da chiedersi se sia davvero necessario introdurre un postulato per definire questo concetto. In fondo, Euclide ha già imposto cinque "assiomi" – asserzioni di "senso comune" che stabiliscono principi di relazione tra grandezze – e ha definito gli elementi base della geometria. Questo postulato sembra asserire solo la "costruibilità" di un segmento da due punti dati. Serve davvero un postulato per questo?

II) Un segmento può essere infinitamente esteso

Anche questo sembra postulato di mera costruzione, però contiene al suo interno il terribile infinito. E' un salto logico profondo, come tutti quelli che introducono l'infinito: a posteriori, riabilita un po' anche il precedente, perchè lo si può vedere come puro contraltare di questo: un tratto rettilineo può essere finito, delimitato da punti, o anche infinito, senza limiti. Non si capisce ancora se serva o meno un postulato per affermazioni così basilari, ma quantomeno si comincia ad intuire che – qualora abbia senso il Primo Postulato – certo anche questo Secondo avrà diritto di cittadinanza in geometria.

III) Dato un segmento, si può disegnare un cerchio avente il segmento per raggio e uno degli estremi del segmento come centro del cerchio.

Più complesso dei precedenti, ma comunque ancora un postulato di costruzione. E' l'anello di congiunzione curvo e rettilineo, tra le rette e i cerchi che popoleranno tutte le dimostrazioni euclidee. A voler essere irrispettosi, lo si potrebbe sintetizzare con "I compassi esistono, e funzionano", ma non abbiamo intenzione di essere irrispettosi. Notiamo solo che anche questo postulato è talmente evidente (a livello di senso comune) da non sembrare necessario; al tempo stesso è tanto complesso (a volerlo definire rigorosamente, senza utilizzare minimamente il senso comune) che il significato ultimo rischia di sfuggire. Ma non vale soffermarcisi troppo, perché e tempo di introdurre un vero capolavoro:

IV) Tutti gli angoli retti sono uguali.

E questo è davvero un mistero. E' quasi una vergogna che sul Quinto Postulato siano stati scritte montagne di pagine, lasciando questo suo fratello maggiore nel limbo della scarsa notorietà. E' bene rammentare che non bisogna giudicare Euclide troppo ingenuo: le sue parole hanno certo un'aria antica, almeno rispetto ai criteri e al linguaggio della matematica moderna, ma spesso sono efficienti, e talvolta poetiche. La prima delle sue 23 "definizioni" è l'incipit perfetto di tutta la geometria:

1. Punto è ciò che non ha parti.

E' davvero profondo. Il punto non ha parti, non è strutturabile, non è "divisibile". E' un atomo ("indivisibile") senza dimensione, e al tempo stesso genera tutte le dimensioni successive. Esistono molte possibili definizioni di "punto"; molte sbagliate, alcune illuminanti, altre precise e calzanti; ma è davvero difficile immaginarne una che abbia al tempo stesso un così elevato grado di precisione e di poesia, nella sua fulminante brevità. Quindi, non possiamo immaginarci Euclide come uno che spreca parole. E, sempre nelle sue "definizioni", si trovano gemme di profondissima attenzione ai fondamenti. Ad esempio:

13. Termine è ciò che è estremo di qualcosa.

che è affermazione che va ben oltre la matematica. Oppure:

2. Linea è lunghezza senza larghezza.

appena meno evocativa della definizione di punto… e così via. Ebbene, alla decima posizione troviamo un esplicito:

10. Se una retta è innalzata su un'altra retta e forma con essa angoli adiacenti uguali fra loro, allora ciascuno dei due angoli è retto, e la retta è detta perpendicolare a quella su cui è innalzata.

Anche in questo caso abbiamo una definizione operativa e meditata degli angoli retti e delle rette perpendicolari, che non a caso prendono battesimo dalla medesima argomentazione euclidea. Così, la domanda devastante che generazioni di geometri avrebbero dovuto porsi è "Data una così esplicita, chiara e sufficiente Decima Definizione, che bisogno c'era di un Quarto Postulato che sembra un'autentica presa in giro?". "Tutti gli angoli retti sono uguali". Diamine, e come potrebbero mai non esserlo? Anche tutti gli angoli di 63°12' 67" sono uguali. E lo sono specialmente se uso il concetto di "angolo uguale" già nella definizione stessa di angolo retto. Eppure Euclide, colui che non spreca parole, l'uomo che evoca e dipinge i concetti, colui le cui idee superano i millenni, ritiene necessario addirittura un Postulato. Il Quarto Postulato che, con estrema furbizia, si pone proditoriamente vicino al chiacchieratissimo Quinto, diventando così di fatto invisibile. Proprio come un quadro appeso vicino alla Gioconda.

Si è tanto parlato del Quinto, e della sua diversa impostazione anche solo "linguistica", se non stilistica, rispetto agli altri quattro postulati. Sembra complesso, farraginoso, artificioso; è anche il postulato che ha il maggior numero di parole – mentre il perfido Quarto è quello che ne richiede di meno – e si cita spesso il fatto che lo stesso Euclide sembri evitare il più possibile di usarlo. Le prime ventotto proposizioni dei suoi Elementi passano infatti silenziose, senza neppure sfiorarlo. E i lettori di Euclide si sono subito chiesti se ci fosse davvero ragione d'essere, per un tale obbrobrio. E se obbrobrio può sembrare parola troppo pesante, gli antichi non è che leggessero il Quinto Postulato in maniera troppo diversa. Già Proclo[7] proverà a farne a meno, tentando di dimostrarlo. Teorema è parola sublime, in matematica, ma talvolta rappresenta un vero e proprio tentativo di declassamento: se fosse dimostrato, il Quinto Postulato decadrebbe da arcano inspiegabile a mero elemento di teoria[8], e i postulati euclidei tornerebbero ad essere semplici, immediati e – soprattutto – solo quattro.

Insieme a Proclo ci proveranno Tolomeo, Wallis, John Playfair, Saccheri, Johann Lambert, Legendre, d'Alembert, Lagrange[9], Gauss, e moltissimi altri. E con approcci variegatissimi: dimostrazioni (sbagliate), definizione di postulati equivalenti (a centinaia), e chi più ne ha più ne metta. Tra i molti tentativi di dimostrazione, un passo essenziale fu fatto proprio dal gesuita italiano Giovanni Girolamo Saccheri: la sua opera più importante si intitola "*Euclides ab Omni Naevo Vindicatus*[10]" , è del 1733, e già dal titolo mostra che il Quinto Postulato era davvero considerato una macchia immonda nel capolavoro euclideo. La sua originalità – almeno rispetto agli autori precedenti – sta proprio nell'avere applicato il celebre metodo di dimostrazione per assurdo al Quinto Postulato. Supponendo "non valido" il postulato, si avventurò nell'esplorazione della geometria per scoprire a quali contraddizioni si arrivasse sotto una tale avventurosa condizione. Nel percorso che compì, arrivò tra l'altro a concludere giustamente che il Quinto Postulato era assolutamente equivalente all'affermazione che la somma degli angoli interni d'un triangolo equivale a due angoli retti; e una volta giunto al termine della sua opera, ritenne di aver ricondotto a mero teorema il postulato euclideo, vista l'evidente assurdità che la sua assenza comportava. In realtà, l'opera di Saccheri è oggi vista come una dei primi trattati di legittima, e non "assurda", geometria non-euclidea.

Il primo matematico a capire che il Quinto Postulato euclideo era necessario solo perché in sua assenza "altre geometrie" sarebbero state possibili fu l'ungherese Janos Bolyai. Nato il 15 Dicembre 1802 a Kolozsvar[11], era figlio di Farkas Wolfgang Bolyai, quello che con buona approssimazione si può definire "il miglior amico" di Gauss. Farkas e Gauss erano stati compagni di studi, e la situazione del piccolo Janos

[7] Quel "già" potrebbe indurre in errore: la nostra scarsa padronanza dei tempi storici ci fa immaginare gli "Antichi Greci" più o meno come tutti concittadini e contemporanei, ma non è proprio così. Euclide visse – si crede – attorno al 300 a.C., Proclo morì nel 481 d.C. Quasi ottocento anni, più o meno la stessa distanza temporale che c'è tra noi e Gengis Khan.

[8] Teorema significa proprio "elemento di teoria".

[9] Nel primo compleanno di RM (Gennaio 2003, RM48) a lui dedicato, raccontiamo del suo *«Il faut que j'y songe encore»*, detto un attimo prima di cominciare una conferenza – poi mai tenuta – proprio sulla "dimostrazione" del Quinto Postulato.

[10] "Euclide vendicato da ogni macchia", o qualcosa del genere…

[11] Luogo che ci mette un po' in imbarazzo per quanto riguarda l'attribuzione della nazionalità del nostro protagonista: ai tempi di Bolyai, Kolozsvar era città pienamente ungherese, ma ai tempi nostri si chiama Cluj, ed è in territorio rumeno.

era ben definita fin dalla nascita: era figlio di un buon matematico strettamente legato al miglior matematico del mondo, e suo padre voleva farlo diventare matematico: non c'erano vie di fuga possibili. Va però riconosciuto a Farkas di non essere stato uno di quei genitori ossessionati dall'idea di avere un figlio prodigio; anzi, visto che faceva suo il motto romano "*Mens sana in corpore sano*", e poiché riteneva che la matematica fosse una prova troppo severa per una mente che non risiedesse in un corpo più che perfetto, si impiegò per fare in modo che il giovane Janos non si curasse troppo della scienza dei numeri da bambino, ma piuttosto si preoccupasse di crescere sano e forte. Un buon senso di protezione paterna che si ritrova anche quando Janos è ormai un giovane libero di affrontare le croci e le delizie della geometria: un amorevole e paterno consiglio dato da Wolfgang al suo erede suona più o meno così:

> "*Sta lontano dal problema delle parallele, figlio mio: al pari delle passioni amorose, è in grado di assorbire tutto il tuo tempo e di rovinarti la salute, di toglierti serenità e felicità*".

Come la maggior parte dei buoni consigli paterni, anche questo verrà accuratamente disatteso. Janos Bolyai si interesserà eccome delle "parallele", anche se bisogna riconoscere che gli renderanno la vita difficile. Appena ebbe superata la fanciullezza, suo padre scrisse a Gauss pregandolo di prendere il giovane Janos presso di sé; il sommo matematico di Brunswick, però, rifiutò l'offerta dell'amico. Il quattordicenne si trovò allora di fronte ad un problema considerevole: aveva intenzione di soddisfare i desiderata paterni che lo volevano matematico, ma la terra d'Ungheria era a quei tempi lontana dai centri di eccellenza della matematica europea. Come succedeva spesso a quei tempi e in quelle condizioni, l'unica alternativa accettabile era quella dell'educazione militare, e Janos Bolyai entrò all'Accademia Militare di Vienna.

In questa sede Janos mostra subito di non essere un tipo qualunque: coltiva il suo eterno amore per la matematica, ma l'idea di suo padre di curarne prima di tutto la salute e forma fisica dà ora i suoi frutti. Janos diventa rapidamente molto popolare come sportivo, eccellendo in tutte le forme di agonismo, brilla come suonatore di violino e, inevitabilmente, come "*tombeur de femmes*". Sport, musica e donne: un po' il sogno di ogni studente universitario dei tempi nostri; ma a dimostrazione del fatto che il nostro riuscisse ad armonizzare bene il dovere e il piacere c'è da notare come il corso di laurea che prevedeva sette anni per essere completato fu bruciato dal nostro in appena quattro. Un celebre aneddoto rammenta di come riuscì a sfidare a duello tredici ufficiali in una sola giornata, vincendoli tutti; e tra un duello e l'altro si rilassava suonando il violino. Sembra uscirne un ritratto molto più simile a quello di un James Bond ante litteram che a quello classico d'uno studioso di matematica.

Ma fu proprio la sua scienza ad essere un po' matrigna con lui: a differenza di quanto fece Saccheri, Bolyai si rese ben conto che una nuova geometria era possibile rinunciando al Quinto Postulato. Scrisse al padre una lettera piena d'entusiasmo "*...dal nulla ho creato un nuovo, strano universo...*" anche se va riconosciuto che il suo capolavoro fu soprattutto proprio quello di "intuire" l'esistenza di geometrie non euclidee, non quello di svilupparle compiutamente. Pubblicò una "Appendice" al *Tentamen* in cui espose questa sua scoperta nel 1832, ma questa primogenitura gli fu in parte sottratta da due studiosi: uno di questi fu proprio il sommo Gauss amico di suo padre. Tra le migliaia di argomenti oggetto dei suoi studi, il grande tedesco dichiara di aver affrontato a suo tempo anche le geometrie non euclidee "*ricavandone grande soddisfazione...*". Bolyai prese davvero male la scoperta che le sue creazioni erano state anticipate da Gauss: divenne irritabile e astioso, e, forse, si sentì anche colpito in qualche modo dalla nemesi dell'avvertimento paterno. Ma i suoi dispiaceri non erano ancora terminati.

Soltanto nel 1848 Janos Bolyai scoprì che un matematico russo aveva pubblicato nel 1829 un'opera che anticipava le sue scoperte (trattandole anche con una maestria e completezza superiori). Lo studioso si chiamava Nikolaj Lobachevsky, e Bolyai non aveva mai sentito parlare di lui. Anzi, la sua prima, isterica reazione fu proprio quella di pensare Lobachevsky come "non esistente", ritenendolo una sorta di invenzione, di "nom de plume" dello stesso Gauss.

Ma Nikolaj esisteva davvero: nato il 1 Dicembre[12] 1792 a Nizhni Novgorod, passò la sua vita quasi interamente all'Universita di Kazan, dove entrò come studente nel 1807 e da dove uscì come rettore nel 1846. Gorky, Kazan e la Russia erano ancora matematicamente più periferiche di quanto lo fosse l'Ungheria, ed è curioso notare questa coincidenza che vede la "rivoluzione della geometria" maturare lontano dai centri accademici, come se un nuovo vento avesse bisogno di arrivare da orizzonti lontani.

In ultima analisi, non è ancora del tutto chiara la successione degli eventi, e la reale primogenitura delle geometrie non euclidee è davvero di difficile attribuzione: un po' perché, come si è visto, in qualche modo già dai tempi di Saccheri si era affrontato il problema; un po' perché la geometria iperbolica di Bolyai e Lobachevsky è solo una delle geometrie possibili (quella sferica di Riemann seguirà cronologicamente, ma non certo per importanza); infine, perché è davvero complicato stabilire quale fu il ruolo di Gauss.

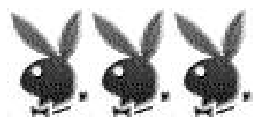
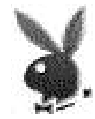
A nostro parere, la migliore descrizione degli eventi l'ha data proprio Janos Bolyai, con la sua più celebre frase: "*Le scoperte matematiche sono come le viole nei boschi: hanno i loro propri tempi, che nessun essere umano può ritardare o affrettare*".

E se questo è vero, può anche darsi che i tempi non siano ancora sufficientemente maturi per appurare fino in fondo quali siano state le ragioni che hanno indotto Euclide ha scrivere il Quarto Postulato. Del Quinto, sappiamo ormai tutto... ma cosa potrebbe mai accadere, se decidessimo di violare il Quarto[13]?

[12] Anche lui nato a Dicembre, il che legittima il presente compleanno a fregiarsi del titolo insolito di "doppio". Era già successo per Babbage e Lovelace, e, curiosamente, anche in quel caso si trattava di compleanno dicembrino.

[13] Sempre che sia violabile: noi non riusciamo proprio ad immaginare come...

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Pronti per le Olimpiadi?			
Finchè Alice è via...			

2.1 Pronti per le Olimpiadi?

Qui da queste parti sono tutti nervosetti... mentre stiamo scrivendo queste note, ci viene ricordato che mancano ***solo*** novantacinque giorni...

Comunque, un mucchio di roba sembra già pronta, e i "Test Event", ossia le gare "di prova", procedono. Tant'è che la grande idea per verificare se tutto funziona è stata quella di usare come cavie un certo numero di torinesi, fornendo biglietti gratuiti a studenti e famiglie; a noi è toccato l'hockey su ghiaccio, Italia-Slovenia (2 a 1, posto che vi interessi); molto interessante il commento di Fred, che non conosceva questo nobile sport: "È come il *wrestling*, solo che hai anche un bastone".

Comunque, tutto questo clima olimpico mi ha fatto venire in mente un vecchio problema che non mi era mai piaciuto molto, anche perchè la soluzione che avevo era bruttissima; provate a vedere cosa riuscite a fare voi...

Una delle competizioni organizzate come test event durerà ***N*** giorni.

Il primo giorno verranno assegnate ***1*** medaglia più ***1/7*** delle medaglie restanti.

Il secondo giorno verranno assegnate ***2*** medaglie più ***1/7*** delle medaglie restanti.

E avanti così: l'n-esimo giorno vengono assegnate le ultime ***N*** medaglie.

La domanda è: quanto dura questa competizione?

Tranquilli, l'impianto funziona. Ed è anche molto bello, anche se non giocherò mai a hockey.

2.2 Finchè Alice è via...

...giochiamo con le probabilità, d'accordo? Tranquilli, torna presto.

Il primo problema è nato da un dubbio piuttosto filosofico di Fred relativamente ad un metodo per decidere chi dovesse giocare per primo ad uno dei soliti giochi balordi di Alberto; Alberto aveva proposto "Per decidere, tiriamo alternativamente un dado; il primo che ottiene un ***6***, gioca per primo". L'interessante risposta di Fred è stata: "Ma non dovremmo decidere anche qui *chi tira per primo*?"

A parte l'interessantissima catena infinita (ottimo modo per non giocare mai), secondo voi, ha ragione Fred? C'è un vantaggio a tirare per primo, in una gara di questo tipo? E qual'è la probabilità?

Questo era solo di riscaldamento, tranquilli. Il bello deve ancora arrivare.

Mentre facevo i conti per questo, mi è tornato sottomano un vecchio problemino che potrebbe andare bene si e no per un "Quick & Dirty", ma una domanda che mi sono posto lo ha decisamente complicato (e "probabilisticato": lo so che come parola non esiste, ma avete capito cosa intendo).

L'originale era piuttosto semplice: da un mazzo di carte da ***52***, quante dovete estrarne per essere sicuri di averne tre dello stesso tipo? E fin qui non dovreste avere problemi.

Già, ma supponiamo di non volere la certezza e di accontentarci di una ragionevole probabilità: *dopo quante carte avete il 50% di probabilità di averne* **3** *dello stesso tipo?*

3. Bungee Jumpers

Provare che per $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reali, qualsiasi sia il valore di ***n*** si ha:

$$\sqrt{a_1^2+(1-a_2)^2}+\sqrt{a_2^2+(1-a_3)^2}+\ldots+\sqrt{a_{n-1}^2+(1-a_n)^2}+\sqrt{a_n^2+(1-a_1)^2}\geq\frac{n\sqrt{2}}{2}.$$

Per quali valori di $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sussiste l'uguaglianza?

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni & Note

Virgilio è riuscito a creare un problema; anzi, due.

Per i meno scafati nell'organigramma di questo gruppo di lavoro, ricordiamo che Virgilio è il gatto di Rudy, e il nome nasce dal fatto che ha eletto domicilio nello scaffale contenente la lettera "V" della letteratura, palesando un discreto interesse per un'edizione dell'Eneide (quella a cura di Mazari-Chiesa, per addetti ai lavori in tutt'altro campo).

In primis, ha deciso che scopo nella vita di Rudy è quello di agitare il puntatore laser (di solito posizionato in prossimità del computer), e quindi qualsiasi tentativo di lavorare a questa rivista viene accolto con due occhioni dolci imploranti la comparsa di "el raton rojo"; capite che la produttività ne risente, quindi non lamentatevi se per questo numero le rubriche normalmente appalto di Rudy non sono propriamente una meraviglia.

In secundis, nell'unico week-end nel quale Rudy sperava di riuscire a lavorare, il Nostro ha deciso che il miglior posto per schiacciare un pisolino di quarantotto ore era una delle scatole dove Rudy tiene i foglietti dei Paraphernalia Mathematica; ogni tentativo di spostarlo si risolveva in un:

"Adesso però fai girare il topo..." (tre minuti di laserate degne di Guerre Stellari...) "Sono stanco, lasciami dormire..." Indovinate dove?

Sempre a proposito dei Paraphernalia, Rudy si è trovato di fronte ad un trilemma (si dice? Beh, se non si dice avete capito che cosa intendiamo):

1. Voleva continuare una cosa che gli avrebbe permesso di presentarvi l'inventore di quasi tutti i Bungee Jumpers, ma si è ritrovato in un paio di vicoli ciechi mica male.
2. Voleva tenere un argomento per febbraio e collegarlo al Compleanno, ma si è accorto che il legame era decisamente labile
3. Da un lettore sono arrivate due righe che per due redattori avevano l'aria decisamente innocua, ma hanno fatto sì che Rudy assumesse un'aria meditativa e andasse a cercare quaderni dimenticati da mesi ("Virgilio, fuori dalle scatole! Allarme rosso!").

Anche se qui queste cose hanno occupato una decina di righe, nella realtà hanno tormentato il Grande Capo per una settimana, durante la quale la produttività ha tranquillamente stazionato sullo zero assoluto.

Cominciamo dal fondo, ossia dal punto (3) che è anche l'unico interessante (anche perchè il (2) lo trovate nei PM).

Abbiamo ricevuto una mail da ***Paolo*** (il ***Pinguino***), che fa una domanda decisamente innocua, del tipo "Perchè non fate la rivista su due colonne?". Paolo, "vaso di Pandora" è un eufemismo, per quello che hai scoperchiato. Rudy questa estate ha cominciato ad interessarsi di quella che lui chiama "libristica" ("bibliofilia" gli pare troppo pretenzioso), studiando caratteri tipografici (il problema sulla "A" era quasi vero), paginazione e mettendosi a rilegare libri con ago e filo *[e legatoio costruito con il "Meccano" dei Validi Assistenti: funziona benissimo, come potete vedere qui a fianco (RdA)]*; ci ha promesso quantomeno un PM sulla paginazione, ma conoscendo i suoi tempi sarà lunga. Comunque, è pienamente d'accordo sul fatto che esteticamente le due colonne siano decisamente più leggibili (sarà per questo che la Treccani ci ha definito "*austera* rivista"?), ma come giustamente fa notare la parte più pragmatica della Redazione, mettere formule un pò lunghe porta a degli incubi tipografici e a questioni filosofiche che scontentano sempre qualcuno. Comunque, dal PM che prima o poi Rudy scriverà *[Ma quando mai... (AR & PRS)]* si spera possano nascere interessanti proposte.

Il legatoio; sullo sfondo, Fred

Altro evento interessante del mese: viste le discussioni geometriche e planetarie del mese scorso, come vi sentireste se vi arrivasse una mail del tipo "Salve, sono Platone. Volevo solo dirvi che avete sbagliato a scrivere il mio nome: non mi chiamo *Plutone* e "Caronte" non lo conosco...". Beh, no, non ci ha scritto lui; ci ha scritto ***Henry SEGERMAN***, per dirci che avevamo sbagliato a scrivere il suo nome nella citazione-e-sostanziale-traduzione dell'articolo originale sulla lampadina e i cento prigionieri. Profonde ed umili scuse, anche se il fatto che se ne sia accorto lui per primo ci fa pensare che ben pochi di voi abbiano effettuato una qualche ricerca.

Comunque, il primo tormentone del mese nasce da Doc: forte di un interessantissimo articolo di ***Dario Bressanini*** sui peperoncini pubblicato su Le Scienze, ha fatto partire una neppure troppo velata indagine sulle proprietà afrodisiache della capsaicina... Dal che si deduce che non solo ha raggiunto un'età in cui ci si comincia ad interessare al costo del Viagra, ma anche che sta diventando decisamente tirchio.

Zar ci ha fornito alcune interessanti notizie relativamente al GeoMag e la numero delle gambe di un tavolo (si, sono quattro: trattasi della dimostrazione che su un pavimento continuo esiste *sempre una posizione stabile*); siamo riusciti, questa volta, a ricambiare fornendo alcuni link alla "EURion Constellation", il sistema antiduplicazione delle banconote: in merito, due veloci notazioni:

1. Se volete vederlo, sono quei tondini nella zona alla sinistra del centro sul recto della banconota; sono particolarmente evidenti nel ***10*** Euro, in rete comunque trovate ampie spiegazioni.
2. Zar, conoscendo la tua professione e il Ministro dal quale dipendi, siamo in grado di stimare il tuo stipendio: non ci crediamo, che "un tuo amico ha cercato di fotocopiarli per giocare a Monopoli...".

Come ultima notizia, ***Gavrilo*** (New Entry! Benvenuto!) ci comunica che l'Arcangelo Gabriele è il patrono delle telecomunicazioni. Qualcuno sa che fine ha fatto la proposta di Sant'Isidoro di Castiglia come patrono di Internet?

4.1 [075]

4.1.1 Le Biglie di Fred

Trovate un'interessantissima discussione del problema nel ***Forum di Base5***; la cosa ci è stata segnalata da ***Alex***. Non la riportiamo, ma vi spieghiamo il perchè e ne approfittiamo per ricordarvi alcune cose.

Fermo restando che a noi piacciono molto i forum (soprattutto quando parlano di noi), il riportare le soluzioni si riduce in una copiatura di un oggetto che, se non lo si copia integralmente, viene decisamente noioso; la copiatura integrale delle discussioni, anche se risulterebbe piuttosto divertente, richiederebbe un'intero numero della rivista; quindi, se interessa andate a vedervela.

Fermo restando che a noi piacciono molto i forum (soprattutto quando parlano di noi), Alex ci passa il tutto in un formato PDF che eufemisticamente definiremo "scarsamente editabile"; inoltre in certi campi Rudy ha la tendenza a soffermarsi più che altro sulle signatures, e quindi ritiene opportuno riportare le migliori. *Panurgo*: "Se la montagna non va da Maometto, Maometto *non* va dalla montagna". *Enrico*: "È la divergenza di opinioni che rende possibili le corse diei cavalli (M. Twain)".

Fermo restando che a noi piacciono molto i forum (soprattutto quando parlano di noi), forse vi siete accorti che le ultime tre frasi cominciano tutte nello stesso modo; ne esiste uno completamente dedicato ad RM (non particolarmente trafficato, dobbiamo dirlo...), e la cosa ci fa molto piacere.

4.2 [081]

4.2.1 Perlina Matematica

Vi avevamo detto che, secondo noi, esistevano delle strade basate sull'inversione geometrica, ma non essendo particolarmente ferrati in questo campo avevamo semplicemente lanciato il sasso senza calcolare niente; ***Sam*** si è dato da fare in merito, e vi trasmettiamo il risultato:

> Abbiamo i due punti ***A(0,a)*** e ***B(b,0)*** sul piano cartesiano; facciamo un'inversione risp a una circonferenza, di centro ***(0,0)*** e raggio $\sqrt{ab}$
>
> In questo modo ***A*** va in ***A'(0,b)*** e ***B*** va in ***B'(a,0)***; la circonferenza con diametro ***OA*** va nella retta ***y=b*** e la circonferenza con diametro ***OB*** va nella retta ***x=a***, la circonferenza con diametro ***AB*** va nella retta $y=-\frac{bx}{a}+b$ (insomma, quella tra ***A'*** e ***B'***).
>
> In tal modo la circonferenza che tange esternamente le tre suddette diventa il cerchio exscritto opposto all'angolo retto nel triangolo ***A',B', C'=(a,b)***.
>
> Una circonferenza di centro ***(s,t)*** e raggio ***r***, sotto inversione nell'origine di raggio ***R***, va in una circonferenza di raggio $R^2\frac{r}{s^2+t^2-r^2}$. Nel nostro caso $R=\sqrt{ab}$, $r=\frac{p}{2}$, $s=a-\frac{p}{2}$, $t=b-\frac{p}{2}$ dove $p=a+b+\sqrt{a^2+b^2}$.
>
> Facendo i conti, viene che il raggio della circonferenza attorno alle altre 3 fa moderatamente schifo...

Condividiamo.

Ormai appurato che la sezione aurea c'entra molto poco, si sono avuti degli interessanti risultati da parte di ***Allanon*** (che ci chiede se "sappiamo chi è". Noi abbiamo impiegato dieci minuti, vediamo voi...):

> Se poniamo l'angolo retto del triangolo in (0,0), cateti 1 e 2 rivolti rispettivamente lungo gli assi y e x, e posto:
>
> per il cerchio 1: centro in (0,y1); raggio r1 (per semplicità; è ovvio che r1=y1)
>
> per il cerchio 2: centro in (x2;0); raggio r2 (per semplicità; è ovvio che r2=x2)
>
> per il cerchio 3: centro in (x2,y1); raggio r3 (per semplicità; è ovvio che (r3)^2=(x2)^2+(y1)^2),
>
> allora il cerchio tangente ai tre cerchi, di centro (Xo, Yo) e raggio Ro, sarà individuato dal sistema di tre equazioni:
>
> $$X_0^2 + (Y_0 - y_1)^2 = (R_0 - r_1)^2 \qquad \texttt{[001]}$$
>
> $$(X_0^2 - x_2) + Y_0^2 = (R_0 - r_2)^2 \qquad \texttt{[002]}$$
>
> $$(X_0^2 - x_2) + (Y_0 - y_1)^2 = (R_0 - r3)^2 \qquad \texttt{[003]}$$
>
> (si sfrutta cioè la proprietà: il punto di tangenza di due cerchi ed i loro centri sono allineati).
>
> La via più semplice che ho individuato per la soluzione di questo sistema, senza incorrere in equazioni con radicali e quindi ad equazioni di quarto grado, consiste:
>
> ricavare Xo dalla differenza di (1)-(3)
>
> ricavare Yo dalla differenza di (2)-(3)
>
> sostituire Xo e Yo così trovati, che sono funzione della sola Ro, ad es. nella (1)
>
> si ricava una equazione di 2° grado nella Ro, che è il raggio del cerchio tangente.
>
> Posti per comodità:
>
> $$\begin{aligned} A_{13} &= r_1^2 - r_3^2 \\ A_{23} &= r_2^2 = r_3^2 \\ B_{13} &= r_1 - r_3 \\ B_{23} &= r_2 - r_3 \end{aligned}$$
>
> Si ottiene la `[004]`:
>
> $$\begin{aligned} &R_0^2\left[4(B_{13}y_1)^2 + 4(B_{23}x_2)^2 - 4(x_2y_1)^2\right] + \\ &R_0\left[8(x_2y_1)^2 r_1 + 4B_{23}(x_2y_1)^2 - 4B_{13}(x_2y_1)^2 - 4B_{13}A_{13}y_1^2 - 4B_{23}A_{23}x_2^2 +\right] \\ &\left[(A_{13}^2 + 2A_{13}x_2^2 + x_2^4)y_1^2 + (A_{23}^2 - 2A_{23}y_1^2 + y_1^4)x_2^2 - 4(x_2y_1r_1)^2\right] = 0 \end{aligned} \qquad \texttt{[004]}$$
>
> Formula ridondante di simboli *[...non quanto si vorrebbe... Allonon, abbiamo aggiunto una parentesi quadra e esponenziato un numero (RdA)]*, che però può essere organizzata in un foglio di calcolo

Ora, qui il nostro si esibisce nel calcolo dell'agile formuletta qui sopra in un foglio Excel che, citando Baez, non vorremmo privarvi della gioia di calcolare; se siete interessati, lo potete richiedere alla Redazione. Complimenti, molto chiaro, anche se assolutamente *inaccrochable*, come diceva Gertrude Stein di un racconto di Hemingway. Vi passiamo comunque le conclusioni.

Si nota allora:

che gli errori percentuali fra $D_0 = 2R_0$ (diametro cerchio tangente) valutato al passo ***n***; e $I_3 = 2r_3^2 = x_2^2 + y_1^2$ al passo ***n-1*** (ipotenusa al passo successivo) **oscillano attorno al valore -1,35117224927549…., cui tendono per $n \to \infty$.**

Per ricavare tale valore basta calcolare D_0 nel caso di un triangolo di cateti che stanno nel rapporto come ***1*** e la radice quadrata del rapporto aureo; per il valore in forma chiusa, basta risolvere la **[004]**, ponendo evidentemente $r_1^2 = 1$ e $r_2^2 = \omega$, sostituendo le espressioni di definizione di tutte le costanti come sopra riportate.

Esiste una serie di triangoli i cui quadrati dei lati seguono una serie simile alla Fibonacci, che per semplicità indico con *Fibonacci Tangente*, definita come $N_n = N_{n-2} + tN_{n-1}$, la quale, per **t**=0,941854130207474… tende al *Rapporto Aureo Tangente*, **ω(t)**=1,5762651584703…, **per i quali triangoli e per $n \to \infty$, l'errore percentuale fra D_0 al passo *n* e I_3 al passo *n+1* tende a zero.**

Nel foglio di calcolo sono pure riportati i grafici oscillanti degli errori percentuali.

Salvo errori ed omissioni; ma i calcoli sono corretti, sono sicuro!

Se credete che il nostro si sia fermato qui, spiacente deludervi... Infatti Allonon passa al ***caso tridimensionale***; Rudy (e il suo Formula Editor) si sono rifiutati di riscrivere l'equivalente della formuletta qui sopra, quindi ve lo passiamo nel medesimo formato in cui lo abbiamo ricevuto: ci limitiamo a mettero in Courier (che secondo noi aumenta la leggibilità, posto che una sì evidente formula ne necessiti).

```
Ro^[4(b*y2*z3)^2+4(d*x1*z3)^2+4(f*x2*y1)^2-16(x2*y1*z3)^2]+
    + Ro[(-4ab-8b*x1^2)*(y2*z3)^2+(-4cd-8d*y2^2)*(x1*z3)^2+(-
          4ef+8f*z3^2)*(x1*y2)^2+
    +32*r3*(x2*y1*z3)^2]+
    [(a^2+4x1^4+4ax1^2)*(y2*z3)^2+(c^2+4y2^4+4cy2^2)*(x1*z3)^2
+(e^2+4z3^4-4ez3^2)*(x1*y2)^2-16 r3^2*(x2*y1*z3)^2]=0
```

Anche qui, non vi riportiamo il foglio Excel ma solo le conclusioni:

Si nota allora:

<u>che gli errori percentuali</u> fra $D_0=2*R_0$ (diametro sfera tangente) valutato al passo n; e la "diagonale" al passo n-1 (simile alla ipotenusa al passo successivo) <u>oscillano attorno al valore -3,13836264329959…., cui tendono per</u> $n \to \infty$

QUESTO NELL'IPOTESI DI FAR SEGUIRE AI "LATI" DEL TRIEDRO LA SERIE DI FIBONACCI CLASSICA A DUE PASSI

<u>che gli errori percentuali</u> fra $D_0=2*R_0$ (diametro sfera tangente) valutato al passo n; e la "diagonale" al passo n-1 (simile alla ipotenusa al passo successivo) <u>oscillano attorno al valore -8,51656377229669…., cui tendono per</u> $n \to \infty$

QUESTO NELL'IPOTESI DI FAR SEGUIRE AI "LATI" e "DIAGONALE" DEL TRIEDRO LA SERIE DI FIBONACCI A TRE PASSI: F(n)=F(n-1)+F(n-2)+F(n-3) ho provato moltissime serie di Fibonacci a tre passi generalizzate; esiste una serie di triedri i cui quadrati dei "cateti" seguono una serie simile alla FIBONACCI, che per semplicità indico con FIBONACCI 3D TANGENTE, definita come $N_n=N_{n-3}+t*(N_{n-2}+N_{n-1})$, la quale, per $t=$ 0,645725781819136 … tende al RAPPORTO AUREO TANGENTE 3D , $\omega(t)$ = 1,51103901745456 …, per i quali triedri e per n->:, l'errore percentuale fra D_0 al passo n; e diagonale a passo n+1 tende a zero. (vedere foglio EXCEL) (esistono infinite serie -> criterio di semplicità)

Al momento non ho alcuna idea sulle correlazioni esistenti fra i vari rapporti e parametri. Il caso nD seguirà appena possibile. Non so se con calcoli

Interessanti le note presenti nella mail:

Considerando soli i "cateti" dei triedri, e la loro serie FIBO classica, l'errore all'infinito è MINORE che considerando la serie comprendente anche le diagonali, con una FIBO classica ma a tre passi. (strano, a priori non l'avrei detto, anzi, credevo il contrario)

Gli errori si annullano per una serie particolare a tre passi e ad unico parametro: la più semplice che ho trovato, purchè il parametro moltiplichi almeno i due penultimi passi (osserva che facendo moltiplicare al param. solo il penultimo passo, e anche ponendo tale parametro pari a zero, si riottiene la FIBO classica a due passi, quindi l'errore sulla serie dei triedri NON annulla)

NON sono assolutamente in grado di stabilire che correlazione esiste fra i vari parametri e rapporti aurei tangenti in 2D e 3D; al contrario, riprendendo quanto detto nella mia prima mail:

"Quella che io ho scelto mi sembrava la più semplice, iniziante con 1; 1; 1+t*1; ....;ne esiste almeno un'altra altrettanto semplice data da Nn=N(n-1)+s*N(n-2) (in luogo della Nn=t*N(n-1)+N(n-2)) che però non ho costruito ne indagato la correlazione esistente fra i parametri: t; s; e il comune rapporto di convergenza:"fi tangente" = 1,5762651584703............"

non so se ti avevo inviato i fatto curioso che, per la:

Xn=X(n-2)+parametro*X(n-1)

1,576265158470300 AUREO ESTESO

0,9418541302074740 PARAMETRO

e, al contrario:

Xn=parametro*X(n-2)+X(n-1)

1,576265158470300 AUREOESTESO

0,9083466913370900 PARAMETRO

convergono allo stesso rapporto ma con parametri diversi..

Francamente, non pensavamo di suscitare 'sto intrigo internazionale, portando a casa una pietruzza. Comunque Allanon ci ha promesso che *non* tratterà il caso generico per ipersfere n-dimensionali, anche se di un tipo così ci fidiamo molto poco... Guardate cosa ha combinato il suo omonimo nel libro, per esempio.

Notizia dell'ultim'ora: Mentre stiamo proprio per andare in macchina (nel senso che è tutto finalmente paginato e volevamo tornarcene a casa), ci sono arrivate altre estensioni e considerazioni da parte di ***Allonon*** e di ***Cid***. Per evitare il numero monografico, li rinviamo al mese prossimo. Comunque, non ci è chiaro se state analizzando in modo così approfondito il problema per consolare Rudy del fatto che la sua Perlina è pura bigiotteria o per rigirare il coltello nella piaga della "bufala".

4.3 [082]

4.3.1 Bruco zerofago

Il mese scorso, nessuno ha fornito immagini dal *De Divina Proportione*. Questo mese, nessuno ha procurato informazioni sul pesce. Vi diciamo subito che Rudy ha intenzione di vendicarsi, e sta solo cercando di capire quale sia il metodo più perfido: quello più quotato al momento prevede l'uso della *libristica* (come la chiama lui) e un'infarinatura di giapponese *[Antico (RdA)]*.

Quanti ne avete, in casa, di questi animaletti? Tutto quello che abbiamo visto a parte la matematica era un discorso su quanto sono disgustosi e antipatici, tanto da farci tornare in mente un pezzo di Heinlein (a costo di ripeterci, sottolineiamo che tanto ci sta simpatico come fantascienza, tanto ci sta antipatico come politica):

> "Conosco due sole specie in grado di digerire la cellulosa, e sono pericolose entrambe"
> "Quali sono?"
> "*Rattus* e *Homo*"
> "Ma l'uomo non digerisce la cellulosa!"
> "Mai mangiato in un McDonald?"

Vabbò, passiamo alle soluzioni... Tanto lo sapete che non è vero (di Rudy, non di McDonald)

La prima arriva da ***Marco il Senese***, il quale ci narra anche una sua avventura da giovane sulla quale dice che possiamo divertirci a sbeffeggiarlo *[Non me lo sogno neanche. In attesa di essere iscritto -con un anno di anticipo- ad una scuola elementare, venivo affidato ad una sorella di mia nonna materna che faceva la portinaia in un posto del genere. Abbiamo un'epifania[14] in comune... (RdA)]* Il nostro, oltre ad esibirsi in un formalismo matematico in modo testo che quasi ci spiace toccare, riesce a mettere quattro note (tutte in modo testo, chiaramente). Le riportiamo come ***N***ote ***d***i ***M***arco.

> Iniziamo con il problema canonico (numeri in base ***10***, dieta ferrea a base di zeri). Diciamo che la lista iniziale dei numeri arriva fino a ***99..99***, con ***n*** novi[15].
>
> Come facciamo a calcolare la somma? Intanto, per complicarci la vita, supponiamo che la lista iniziale fosse fatta da tutti e soli i numeri di ***n*** cifre dove non compaiono gli zeri. In questo caso, il bruco zerofago è molto scocciato perché gli tocca di saltare il pasto, ma se non altro possiamo considerare la somma dei numeri così come sono.
>
> Chiamo tale somma Z_n. Quanto fa? Beh, qui viene bene il trucco di un ragazzino di nome Karl Friedrich, che scrisse i numeri dall'uno al cento una volta in senso crescente, l'altra in senso decrescente per scoprire che tutte le coppie avevano

[14] Nota che non c'entra assolutamente nulla: un paio d'ore dopo aver scritto questo, mentre stavo leggendo un libro della concorrenza (P. Odifreddi, Il Matematico Impertinente), ho trovato la definizione di "epifania" come "manifestazione dall'alto", seguita dall'informazione che questa parola indicava, per i greci, la visione delle figure geometriche "da sopra"; non solo, ma le "stigmate" erano, all'epoca, i punti geometrici.

[15] *[N.d.M.]* Ci sono pochi dubbi sul fatto che alcuni numerali ammettano a buon diritto di essere declinati al plurale: gli "zeri" hanno piena cittadinanza nel vocabolario italiano e lo stesso vale per gli "uni", che vanno a passeggio abitualmente con gli "altri". Qualche dubbio potrebbe sorgere sui "sei", dato che potrebbe trattarsi della forma plurale di un sostantivo singolare terminante in -i. Ancora più acrobatico è ammettere i "quattri", anche se, di solito, i loro fratelli piccoli, i "quattrini", vengono comunemente accettati senza particolari proteste. Casi ambigui sono poi i confratelli "dui" e "setti", uno è il disgraziato plurale di un vocabolo che con i cardinali ha poco o nulla a che fare. L'altro potrebbe quasi essere il plurale di "duo", se non che il signor Garzanti mi fa gentilmente notare che "duo" è invariante (se non è sfortuna questa...). Per ovviare a questo insoddisfacente stato di cose, con atto unilaterale, decreto che nella lingua italiana possano figurare i plurali di tutte le cifre decadiche, autorizzando finalmente il libero uso di "dui", "trei", "quattri", "cinqui", "sei", "setti", "otti" e, finalmente, "novi" *[Lungi da noi l'idea di contraddire, ma nutriamo qualche dubbio sui "trei", anche se "due trei che fanno un sei" ha una notevolissima potenza espressiva. Lo accettiamo anche per il fatto che "i tri" e "i trii" sono bruttissimi (RdA & PRS)]*.

somma costante (nel suo caso 101) e che le coppie erano 100 *[non è andata proprio così, ma il concetto è chiaro. Per chi conosce l'originale può sembrare che il Nostro, ormai preso dagli uni, dai dui e dai novi, abbia sbagliato a contare i Coppi (RdA)]*.

Nel nostro caso, il procedimento funziona, ma le coppie di numeri sommano a ***111..10*** (n uni, seguiti da zero), vale a dire $10 \cdot \frac{10^n - 1}{9}$. Le coppie sono tante quanti i numeri, cioè 9^n. Dato che abbiamo scritto la lista due volte, la somma va divisa per due, dandoci come risultato:

$$Z_n = 5 \cdot 9^{n-1} \cdot (10^n - 1) \qquad [005]$$

Ora ci piacerebbe sfruttare questa roba per calcolare la somma lipogrammatica[16] senza zeri. Per farlo, mi è venuto in mente un trucco preso in prestito dai miei ricordi delle elementari.

La nostra maestra, per spiegarci i numeri a più cifre, ci aveva infatti insegnato che le cifre hanno sempre un colore, a seconda del loro valore posizionale: le unità erano nere, le decine rosse, le centinaia verdi e le migliaia blu. Provate voi a fare una pagina di calcoli quando, per scrivere un numero, dovete ad ogni cifra posare una matita e prenderne un'altra! *[Se non ricordiamo male, di numeri colorati abbiamo già parlato (anche se quelli che li avevano inventati li hanno sbattuti in galera per truffa e loro applicavano la coloritura in un modo totalmente diverso). Comunque, ci tengo a sottolineare che la mia agenda riporta in rosso le attività del lavoro "che paga", in verde quelle relative a RM, in blu quelle relative alla famiglia e avanti così per* **sei** *diversi colori (fatti miei, chiaro?). All'inizio è effettivamente terrificante, ma se lavorate su base settimanale dopo al massimo un mese diventa comodissimo (RdA)]*.

Chiaro? Bene, applichiamo questa tortura cromatica al pranzo del bruco (stavolta con tutti i numeri, anche quelli con lo zero). Giusto per riprendere l'esempio del testo: ***1200*** e ***6054***; dopo il pasto dell'insetto, restiamo con in mano un ***12*** blu-verde, un ***6*** blu e un ***54*** rosso-nero[17].

Oh, ora, accecati dall'ira causata dallo scempio del bacherozzo, presi da furore bibliotecario, cerchiamo di rimettere insieme i cocci numerici raggruppandoli per colore. E... magia... risultano tante somme del tipo Z_h.

Già, proprio tante. Ma tante quante? Ad esempio, quanti sono i setti verdi? Beh, tanto per cominciare, il numero da cui sono tratti doveva contenere un sette verde (e fin qui...), preceduto e seguito da zeri (altrimenti il taglio del bruco non poteva lasciare la sola cifra verde). Significa che doveva essere del tipo ***070?***. "***?***" è libero di variare sull'insieme delle cifre e quindi i setti verdi sono ***10***. Con ragionamenti simili si scopre che i setti blu sono ***100*** (non c'è nessuna cifra zero a precedere), i setti rossi sono ***10*** e i setti neri sono ***100***. Naturalmente, in tutto ciò il ***7*** non gioca alcun ruolo particolare e possiamo divertirci a ripetere il giochino con le altre cifre diverse da zero. Ne segue che, ad esempio, la somma di tutti i numeri da una cifra verde è $10Z_1$.

A questo punto non c'è molto altro da fare se non montare i pezzi. I cocci di ***quattro*** cifre hanno somma Z_4. I cocci di ***tre*** cifre hanno somma $2Z_3$ (Z_3 è la somma dei

[16] *[N.d.M.]* Quanti punti vale l'utilizzo dell'aggettivo "lipogrammatico"? *[Moltissimi, ma senza anestesia. A meno che tu conosca quei due loschi figuri di Queneau e PMP (RdA)]*

[17] *[N.d.M.]* Ogni riferimento a squadre di calcio realmente esistenti è puramente casuale.

numeri blu-verde-rossi e un altro (Z_3 è la somma dei numeri verde-rosso-neri). I cocci di ***due*** cifre hanno somma $21Z_2$ ($10Z_2$ per i blu-verdi, Z_2 per i verde-rossi e $10Z_2$ per i rosso-neri). I cocci di ***una*** cifra hanno somma $220Z_1$.

Bene. A questo punto vi fate il conto e, se il mio excel non mi ha tradito, dovrebbe fare **37.359.000**. Suppongo però che la somma in carne ed ossa non vi importi per davvero, ma vi interessi piuttosto sapere se esiste una formula.

Ci manca di capire come è fatta la forma generica dei coefficienti che abbiamo intravisto: ***1***, ***2***, ***21***, ***220***, ...***?***...

Il caso anomalo è il primo termine. Ma che quello faccia ***1*** si capisce (corrisponde ai numeri che mantengono tutte le cifre dopo l'abbuffata, quindi sono i numeri senza zeri, la cui somma fa Z_n per definizione).

Dal secondo termine in poi, si distinguono due casi. Diciamo che vogliamo trovare il coefficiente relativo a gruppi di ***j*** cifre. Per comodità, pongo $h = n - j - 1$. Se il gruppo di cifre è estremo (in testa o in coda) significa che in origine c'erano ***j+1*** cifre sicure (le j cifre date, più lo zero mangiato che le delimita). Ne segue che restano libere di variare $h = n - j - 1$ cifre, per 10^h occorrenze. Questo caso si ripete ***2*** volte (una in testa e una in coda). In tutti gli altri casi, il gruppo di cifre è centrale e ha zeri ad entrambe le estremità. Le cifre libere sono $h - 1$. Il caso si ripresenta h volte: le posizioni di un blocco di ***j*** cifre all'interno di un numero di n cifre sono $n - j + 1$, ma due sono estreme e le restanti ***h*** sono centrali.

Quanto fa in totale? Dunque, ***2*** volte 10^h e ***h*** volte 10^{h-1}, mmmmh..., dovrebbe fare più o meno $2 \cdot 10^h + h \cdot 10^{h-1}$.

Definisco :

$$c(h) = \begin{cases} 2 \cdot 10^h + h \cdot 10^{h-1} & \text{se } h \geq 0 \\ 1 & \text{se } h = -1 \end{cases}$$

Non è una funzione campata per aria: risulta $c(-1) = 1$, $c(0) = 2$, $c(1) = 21$, $c(2) = 220$,... la sequenza dei coefficienti che desideravamo.

In sintesi, possiamo riscrivere il risultato cercato in modo compatto come *[Non siamo sicuri di aver capito bene: ci proviamo, comunque]*

$$\sum_{j=1}^{n} c(n - j - 1) Z_j \ .$$

Ora, guardando meglio, questa roba è una somma di somme geometriche [$\sum \beta^t$] e somme del tipo $\sum t\beta^{t}$, con opportuni coefficienti. Quelli bravi sanno anche che è possibile scrivere quelle somme in formula chiusa, ma si tratta di un lavoro noiosissimo e sterile e ve[18] lo risparmio.

Ok. Questo copre bene il caso con un numero di cifre ***n*** generico. Con poco sforzo in più, si copre pure il caso della base ***b*** generica:

[18] *[N.d.M]* .più che altro, "me".

$$Z_n = \frac{b}{2}(b-1)^{n-1}(b^n - 1)$$
$$c(h) = 2b^h + hb^{h-1}$$

Se invece la lista fosse infestata da bruchi $[0, x-1] - \text{fagi}$, occorre prestare qualche attenzione in più.

Infatti, la somma *à la Karl Friedrich* risulta composta da $(b-x)^n$ coppie assommanti $(b+x-1)\cdot 1\ldots 1$ (n uni), per cui

$$Z_n = \frac{b+x-1}{2}\cdot(b-x)^n\cdot\frac{b^n-1}{b-1}.$$

Anche se non sembra, se ***x=1***, torna quella di prima (cosa che, tutto sommato, non mi dispiace affatto!).

Il conto dei coefficienti ***c(h)*** pure subisce qualche variazione sul tema. $c(-1)$ [blocchi lunghi ***n***] è ancora ***1***, come è ovvio. In tutti gli altri casi, si distingue come prima se il blocco di ***j*** cifre è in posizione estrema (due casi), vi sono ***x*** possibilità per la sola cifra di confine mangiata, e b^h possibilità per le ***h*** cifre libere.

Se invece il blocco di ***j*** cifre è in posizione centrale (***h*** casi), vi sono x^2 possibilità per le cifre di confine e b^{h-1} per le cifre libere.

Se non ho perso pezzi per strada, dovrebbe fare

$$c(h) = 2xb^h + hx^2b^{h-1}.$$

Fatte queste posizioni, la formula

$$\sum_{j=1}^{n} c(n-j-1)Z_j$$

resta valida. Anche qui, i masochisti possono divertirsi a scrivere la sommatoria in forma chiusa per vedere se, di grazia, si semplifica qualcosa. Io non ne ho voglia e vi saluto qui.

Dr.Toki è uno di quelli che cui i pesciolini non piacciono: " *Certo che come insetti fanno ribrezzo. E ancor più se divorano la carta e, di conseguenza, libri; ci tengo molto alla mia (disordinatissima) biblioteca*" Beh, anche noi ci teniamo ai libri, ma siamo in dubbio se siano più pericolosi degli insetti che ricavano nutrimento materiale dai nostri libri mangiandone qualche parte o certi visitatori che ne traggono nutrimento spirituale chiedendoli in prestito e non rendendoli mai *[Dr.Toki, potresti la prossima volta mandare la soluzione in formato editabile? il PDF, per noi, è una rogna... Modifichiamo leggermente il formato, tanto dobbiamo riscriverlo integralmente (RdA)].*

Riformulo il problema in altri termini:

Ho una tabella con quattro caselle e le nove cifre da ***1*** a ***9***. In ciascuna casella posso inserire al massimo una cifra (ma anche nessuna); nella tabella si possono così ottenere numeri di 1, 2, 3 o 4 cifre oppure coppie di numeri, uno dei quali di 1 cifra, l'altro di 1 oppure 2 cifre. Calcolare la somma complessiva di tutti i numeri che si possono ottenere.

x			

	x		

		x	

			x

Tabella 1

Numeri di 1 cifra Ci sono 4 possibili scelte per la casella in cui scrivere la cifra, come indicato in ***Tabella 1***, e dato che questa cifra è una qualunque delle 9 la somma S_1 di tutti i numeri di 1 cifra è:

$$\begin{aligned} S_1 &= 4 \cdot \sum_{u=1}^{9} u \\ &= 180 \end{aligned}$$

x		x	
x			x
	x		x

Tabella 2

Coppia di numeri di 1 cifra ciascuno Le scelte delle caselle sono ***3***, come indicato in ***Tabella 2***, e dato che per ciascuna delle ***9*** cifre che posso inserire in una cella ci sono ***9*** cifre che posso inserire nell'altra, la somma S_2 di tutte le coppie di numeri di 1 cifra è:

$$\begin{aligned} S_2 &= 3 \cdot \sum_{u_1=1}^{9} u_1 \cdot \sum_{u_2=1}^{9} u_2 \\ &= 6075 \end{aligned}$$

Numeri di 2 cifre Le scelte delle caselle sono di nuovo ***3***, come indicato in ***Tabella 3***.. Se un numero di ***2*** cifre lo scrivo come ***10d + u***, allora, dato che per tutte e ***9*** le possibili scelte per ***u*** ci sono ***9*** possibili scelte per ***d*** e, viceversa, per tutte e ***9*** le possibili scelte per ***d*** ci sono ***9*** possibili scelte per ***u***, la somma S_3 di tutti i numeri di ***2*** cifre è

x	x		
		x	x
	x	x	

Tabella 3

$$\begin{aligned} S_3 &= 3 \cdot \sum_{u=1}^{9} \sum_{d=1}^{9} (10d + u) \\ &= 3 \cdot \left[9 \cdot \sum_{d=1}^{9} 10d + 9 \cdot \sum_{u=1}^{9} u \right] \\ &= 13365 \end{aligned}$$

x		x	x
x	x		x

Tabella 4

Coppia di numeri, uno di 1 cifra, l'altro di 2 cifre Ci sono solo ***2*** possibilità, come indicato in ***Tabella 4***, e per ricavare la somma di ognuna di esse mi basta moltiplicare i valori delle somme di una singola scelta dei casi 1 e 3 visti sopra:

$$S_4 = 400450$$

Numeri di 3 cifre Anche qui ci sono solo ***2*** possibilità, come indicato in ***Tabella 5***. Scrivo un numero di ***3*** cifre come ***100c+10d+u*** e ragiono come nel punto ***2***: per tutte le ***81*** possibili scelte per la coppia ***u***, ***d*** ci sono ***9*** possibili scelte per ***c***; per tutte le ***81*** possibili scelte per la coppia ***u***, ***c*** ci sono ***9*** possibili scelte per ***d***; per tutte le ***81*** possibili scelte per la coppia ***d***, ***c*** ci sono ***9*** possibili scelte per ***u***. Quindi:

x	x	x	
	x	x	x

Tabella 5

$$\begin{aligned} S_5 &= 2 \cdot \sum_{u=1}^{9} \sum_{d=1}^{9} \sum_{c=1}^{9} (100c + 10d + u) \\ &= 2 \cdot \left[81 \cdot \sum_{c=1}^{9} 100c + 81 \cdot \sum_{d=1}^{9} 10d + 81 \cdot \sum_{u=1}^{9} u \right] \\ &= 809190 \end{aligned}$$

x	x	x	x

Tabella 6

Numeri di 4 cifre La scelta `e unica, come indicato in ***Tabella 6***. Analogamente a prima, scrivo un numero di ***4*** cifre come ***1000m+100c+10d+u***: per tutte le ***729*** possibili scelte per la terna ***u***, ***d***, ***c*** ci sono ***9*** possibili scelte per ***m***; per tutte le ***729*** possibili scelte per la terna ***u***, ***d***, ***m*** ci sono ***9*** possibili scelte per ***c***; per tutte le ***729*** possibili scelte per la terna ***u***, ***c***, ***m*** ci sono ***9*** possibili scelte per ***d***; infine per tutte le ***729*** possibili scelte per la terna ***d***, ***c***, ***m*** ci sono ***9*** possibili scelte per ***u***. Quindi:

$$\begin{aligned} S_6 &= \sum_{m=1}^{9}\sum_{c=1}^{9}\sum_{d=1}^{9}\sum_{u=1}^{9}(1000m+100c+10d+u) \\ &= 729\cdot\sum_{m=1}^{9}1000m + 729\cdot\sum_{c=1}^{9}100c + 729\cdot\sum_{d=1}^{9}10d + 729\cdot\sum_{u=1}^{9}u \\ &= 36446355 \end{aligned}$$

Somma complessiva La somma complessiva ***S*** è data dalla somma delle somme parziali S_1, $i = 1,\ldots,6$ ottenute sopra:

$$S = \sum_{i=1}^{6} S_i = 37676115$$

Molto pragmatica, e interessante. Peccato che al nostro Formula Editor stiano antipatiche le sommatorie e sia schiantato ***tre*** volte, durante la copia. Infatti ***Michele*** arriva sostanzialmente alle stesse formule in modo più schematico usando *trenta* simboli di sommatoria (*lui* usa MathType, quindi può permetterselo... Comincia ad essere nostra opinione che le "more advanced features" pubblicizzate siano traducibili come "almeno non schianta").

Attenzione che abbiamo detto ***alle stesse formule***, non ***allo stesso risultato***. E, con Michele, sembra d'accordo ***Cid*** (il quale usa un metodo che richiede pochissime sommatorie, quindi digeribile dal nostro Formula Editor). Di seguito, in metodo molto "americano" (prima la risposta e poi i calcoli), la sua soluzione che coincide, *in risultato*, con quella di Michele.

La soluzione del problema per il caso generale è la seguente:

$$\frac{(b-1+x)}{2} * \left((b^{n-1}) * \sum_{i=1}^{n} (b-x)^i + (x * b^{n-2}) * \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{i} (b-x)^k \right)$$

che nel caso di b = 10, n = 4 e x = 1 ci fornisce un totale di 37359000.

Dimostrazione

Il termine $\frac{(b-1+x)}{2}$ è semplicemente la media dei valori delle cifre che non vengono mangiati dal bruco.

Questo valor medio viene moltiplicato per i due fattori all'interno della parentesi tonda.

Il risultato del prodotto con il primo fattore:

$$\frac{(b-1+x)}{2} * (b^{n-1}) * \sum_{i=1}^{n} (b-x)^i$$

si giustifica cosi:

considero la i-esima posizione delle cifre, il primo fattore considera il caso che alla destra di questa cifra non vi siano cifre mangiate dal bruco, le cifre a sinistra della posizione "i" sono (n-i) e quindi abbiamo $\left(b^{n-i}\right)$ combinazioni per ogni cifra in posizione "i" mentre le cifre a destra sono "i-1" e quindi abbiamo $(b-x)^i$ combinazioni (ricordo che sto considerando il caso in cui a destra non vi siano cifre mangiate dal bruco), il totale della somma delle cifre in posizione "i" vale dunque: $\frac{(b-1+x)}{2} * (b-x)^i * \left(b^{n-i}\right) * \left(b^{i-1}\right)$, cioé: media * (combinazioni a destra) * (combinazioni a sinistra) * (valore posizionale in "i"). Risolvendo il prodotto e facendo la sommatoria sulle n possibili posizioni delle cifre si ottiene infine il prodotto tra il primo fattore e il valor medio delle cifre non mangiate. C.V.D.

Il risultato del prodotto con il secondo fattore:

$$\frac{(b-1+x)}{2} * \left(x * b^{n-2}\right) * \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{i} (b-x)^k$$

si giustifica cosi:

considero la i-esima posizione delle cifre, il secondo fattore considera il caso che alla destra di questa cifra vi sia almeno una cifra mangiata dal bruco, chiamo "k" la posizione della cifra mangiata dal bruco più vicina alla posizione "i".

Al variare di "k" da 1 a "i-1" abbiamo che la somma delle cifre in posizione "i" ha un valore posizionale uguale al prodotto dei seguenti fattori:

$\frac{(b-1+x)}{2}$	(valor medio delle cifre non mangiate dal bruco)
$\left(b^{n-i}\right)$	(combinazioni a sinistra della posizione "i")
$\left(b^{i-k}\right)$	(valore posizionale della posizione "i+1" dopo il pranzo del bruco in posizione "k")
$\left(b^{k-1}\right)$	(combinazioni a destra della posizione "k")
$\left(\frac{x}{b}\right)$	(frequenza di cifre mangiate nella posizione "k")
$(b-x)^{i-k}$	(combinazioni di cifre non mangiate tra la posizione "i" e la posizione "k")

Questo prodotto vale dunque per la posizione "i":

$$\frac{(b-1+x)}{2} * \left(\frac{x * b^{n-1}}{b}\right) * \sum_{k=1}^{i-1} (b-x)^{i-k}$$

Facendo la sommatoria sulle n possibili posizioni delle cifre si ottiene infine[19]:

[19] Per il secondo fattore, il prodotto viene:

$$\frac{(b-1+x)}{2} * \left(\frac{x * b^{n-1}}{b}\right) * \sum_{i=2}^{n} \sum_{k=1}^{i-1} (b-x)^{i-k}$$

$$\frac{(b-1+x)}{2}*\left(x*b^{n-2}\right)*\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{i}(b-x)^{k}$$

C.V.D.

Beh, forse ***Zar*** ci può dare una mano a capire cosa sta succedendo, riportandoci anche verso la soluzione di Marco...

Indichiamo con f(n) la somma di tutti i numeri di n cifre che non contengono lo zero. Abbiamo che

$$f(1)=1+2+3+\ldots+9=45$$

Vediamo ora come calcolare f(2). Scriviamo i numeri da sommare (carattere non proporzionale):

11 + ... + 19

21 + ... + 29

...

91 + ... + 99

Da ogni addendo della prima riga sottraiamo 10, da ogni addendo della seconda 20, eccetera fino all'ultima riga da cui sottraiamo 90. Siccome gli addendi di ogni riga sono 9, abbiamo che

11 + ... + 19 = 9*10 + f(1) = 90*1 + f(1)

21 + ... + 29 = 9*20 + f(1) = 90*2 + f(1)

...

91 + ... + 99 = 9*90 + f(1) = 90*9 + f(1)

Osserviamo ciò che sta scritto a destra dell'uguale: se dalla prima colonna raccogliamo 90, otteniamo 90*f(1); sommando poi tutti gli addendi della seconda colonna otteniamo 9f(1). Totale finale:

$$f(2)=90f(1)+9f(1)$$

Passiamo al calcolo di f(3). Anche qua scriviamo tutti gli addendi da sommare, e vediamo che succede:

---

ma semplificando si ricava la formula sopra indicata.

Infatti:

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}(b-x)^{i-k}=\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}(b-x)^{k}$$

e

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}(b-x)^{k}=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{i}(b-x)^{k}$$

inoltre:

$$\left(\frac{x*b^{n-1}}{b}\right)=x*b^{n-2}$$

111 + ... + 119 = 9*110 + f(1) = 90*11 + f(1)

121 + ... + 129 = 9*120 + f(1) = 90*12 + f(1)

...

191 + ... + 199 = 9*190 + f(1) = 90*19 + f(1)

211 + ... + 219 = 9*210 + f(1) = 90*21 + f(1)

...

991 + ... + 999 = 9*990 + f(1) = 90*99 + f(1)

La prima colonna è uguale a 90f(2) mentre la seconda contiene il fattore f(1) per un totale di 81 volte (infatti i numeri da 11 a 99 che non contengono mai 0 sono 81: 9 possibilità per la prima cifra e altre 9 per la seconda). Quindi

$$f(3) = 90 f(2) + 9^2 f(1)$$

Allo stesso modo calcoliamo f(4).

1111 + ... + 1119 = 9*1110 + f(1) = 90*111 + f(1)

...

1191 + ... + 1199 = 9*1190 + f(1) = 90*119 + f(1)

...

9991 + ... + 9999 = 9*9990 + f(1) = 90*999 + f(1)

Otteniamo quindi

$$f(4) = 90 f(3) + 9^3 f(1)$$

Possiamo quindi azzardare una formula generale (anche se questo ci basta per il calcolo richiesto con numeri di massimo 4 cifre):

$$f(n+1) = 90 f(n) + 9^n f(1)$$

Ora veniamo al calcolo richiesto dal quesito. Per dare una risposta possiamo immaginare che tutti i numeri da 1 a 9999 siano composti da 4 cifre, eventualmente facendo precedere da qualche 0 i numeri minori di 1000.

Possiamo scomporre l'insieme dei numeri da 1 a 9999 in vari sottoinsiemi, classificandoli in base al numero di cifre 0 che essi contengono. Abbiamo quindi numeri che non contengono la cifra 0, numeri che contengono una volta sola la cifra zero, numeri che la contengono due volte, tre, e quattro (che sarebbe poi il numero 0000, che viene mangiato completamente dal bruco ma che lasciamo per dare un senso di compiutezza e di simmetria al tutto).

1. Numeri che non contengono la cifra 0

   Questi numeri sono del tipo **xxxx** e la loro somma è uguale a ***f(4)*** per definizione di ***f(n)***

2. Numeri che contengono la cifra 0 una sola volta.

   Suddividiamo questi numeri in due categorie. La prima è quella che contiene numeri del tipo **0xxx** oppure **xxx0**, cioè numeri in cui le tre cifre diverse da zero sono contigue. Entrambe le categorie forniscono (quando sommate) un contributo pari a ***f(3)*** e quindi, sommando tutto, otteniamo ***2f(3)***.

   La seconda categoria è composta dai numeri del tipo **x0xx** e **xx0x**, cioè numeri che vengono spezzati dalla cifra 0 in due parti, una di una sola cifra e una di due cifre. Consideriamo le due parti separatamente: la parte di una sola cifra viene ripetuta tante volte quanti sono i numeri di due cifre che non contengono la cifra 0, cioé 81. Per capirci, i numeri del tipo x0xx sono questi:

1011 2011 ... 9011

1012 2012 ... 9012

...

1099 2099 ... 9099

e quindi osserviamo che ci sono 81 numeri 1, 81 numeri 2, ... , 81 numeri 9. Viceversa, ci sono 9 numeri 11, 9 numeri 12, ... , 9 numeri 99.

Quindi, per i due numeri che fanno parte di questa seconda categoria otteniamo $9f(2)+81f(1)$ e dunque, in totale, abbiamo $2(9f(2)+81f(1))$

3. Numeri che contengono la cifra 0 due volte.

   Anche qui abbiamo due categorie. La prima è composta da **00xx**, **0xx0**, **xx00**. Ognuna di queste categorie contribuisce con un addendo pari a ***f(2)*** e quindi in totale abbiamo ***3f(2)***

   La seconda categoria è composta da **0x0x**, **x0x0**, **x00x**. Ognuna di queste **x** vale ***9f(1)*** e quindi in totale abbiamo ***54f(1)***

4. Numeri che contengono la cifra 0 tre volte.

   Qui c'è una sola categoria, composta da **000x**, **00x0**, **0x00**, **x000**. In totale abbiamo un contributo pari a ***4f(1)***.

5. Numeri che contengono la cifra 0 quattro volte.

   Qui c'è un unico numero: **0000**, presente solo per ragioni di simmetria, perché il suo contributo è ***0***.

In totale, sommando tutti i contributi di tutte le categorie, otteniamo la formula finale che ci dà il risultato richiesto:

$$f(4)+2f(3)+21f(2)+220f(1)=37359000$$

Nota a margine: nel fare questo calcolo sono passato attraverso qualche risultato parziale, per controllare i passaggi. Ho quindi calcolato quindi prima le somme dei numeri di 1 cifra sola, poi di due e infine di tre. E ho notato una cosa interessante, e cioè che i coefficienti di quella formua sono sempre uguali. Mi spiego meglio, con una cifra sola si ottiene, naturalmente, con due cifre si ottiene con tre cifre si ottiene Sembra quindi che la successione 1, 2, 21, 220 abbia un qualche significato importante, ma non è nemmeno presente nella encyclopedia of integer sequences. Mah.

Oibò! Qualcuno telefoni all'EIS. E inserisca Zar e Marco come scopritori e noi come reference.

4.3.2 Il Sentiero da Cui...

Qui, ***Sam*** andava decisamente di fretta, ma si è esibito in un'opera di ASCII Art non da poco. Prima di passare alle soluzioni più attente (sia detto senza alcun intento critico), crediamo sia nostro dovere esibirla. Il riportare tutto in text mode ***non*** è dettato da pigrizia.

Capita di rado che io abbia il tempo, la voglia, ~~la capacità~~[20] di scrivere una soluzione ai vostri problemi ... infatti questa è solo mezza soluzione ad un problema, ma (come si dice) chi si accontenta gode. Del resto, vedrete dalla brevità di quanto segue che è più un gesto simbolico che un sincero impeto solutorio.

L'ipotenusa dell'***n***-esimo triangolino sia ***H_n***. Allora

```
H_n=H_{n-1} / cos(pi/2^{n+2}), con H_0=1.
```

Ora, al limite la proiezione sull'asse x coinciderà con l'ipotenusa, quindi possiamo calcolare direttamente ***lim H_n*** (basterebbe un altro calcoletto per vedere che l'ennesima proiezione è proprio la ennemenounesima ipotenusa, ma detto così è più mistico...)

Ora, è "noto" che

```
  inf
 ________
 |    |       /    x    \      sin x
 |    |   cos +------- | =  -------     per x complesso
 |    |       \   2^k  /        x
   k=1
```

e dunque, nel nostro caso essendo x=pi/2, si ha che lim H_n=pi/2.

MaMo si è impegnato un filino di più, ottenendo una soluzione che, anche se prende tutta un'altra strada, ha un suo interesse *[Solo una richiesta: e fare i disegni come disegni? Portare quella roba qui è un lavoraccio... Proviamo con un PrintScreen, ma la cosa non ci piace (RdA)]*

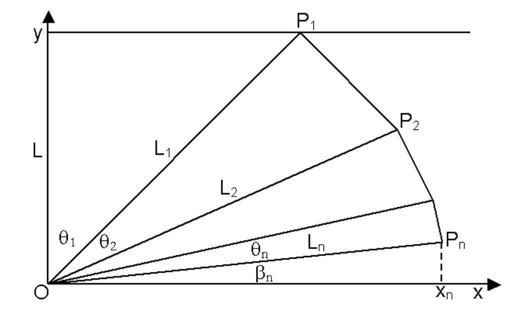


Figura 1 - La figura

<u>Soluzione</u>: Utilizziamo il piano cartesiano con origine in ***O*** e asse delle ***x*** coincidente con il bordo del sentiero. Sia ***L*** la larghezza del sentiero e L_1, L_2, L_3,....,L_n le ipotenuse del ***1°***, ***2°***, ***3°***....***n°*** triangolo rettangolo. Indichiamo con θ_1, θ_2, θ_3.....θ_n i rispettivi angoli in ***O*** e con P_1, P_2, P_3.....P_n i vertici dei triangoli. Chiamiamo inoltre β_n l'angolo che l'ipotenusa L_n forma con l'asse delle ***x*** (vedi figura) *[Farebbe piacere vederla, la figura... Disegnare dentro Word è un problema epico. Ce la caviamo con un PrintScreen (RdA)].*

Per un noto teorema di trigonometria, l'ascissa del punto P_n è:

$$x_n = L_n \cos \beta_n$$

Determiniamo β_n. Dalla figura si può scrivere la seguente uguaglianza:

$$\beta_n = \frac{\pi}{2} - \left(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + ... + \theta_n\right) = \frac{\pi}{2} - \sum_{i=1}^{n} \theta_i$$

Ricordando che $\theta_n=\pi/2^{n+1}$, essa diventa:

$$\beta_n = \frac{\pi}{2} - \pi \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i+1}}$$

La somma è una serie geometrica di ***n*** termini e ragione ***1/2***. Perciò si ottiene:

[20] Questa viene censurata dalla Redazione: Sam ha mostrato più volte di avere la capacità di risolvere ogni problema proposto. Semplicemente, non ne aveva voglia (e/o tempo)

$$\beta_n = \frac{\pi}{2} - \pi\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{i+1}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = \frac{\pi}{2^{n+1}} = \theta_n$$

L'ascissa del punto $\boldsymbol{P_n}$ diventa perciò:

$$x_n = L_n \cos\theta_n \qquad \texttt{[001]}$$

Consideriamo ora i primi triangoli rettangoli. Le relazioni che legano una ipotenusa alla successiva sono:

$$L = L_1\cos\theta_1 \qquad L_1 = L_2\cos\theta_2 \qquad L_2 = L_3\cos\theta_3$$

In generale, per l'ennesimo triangolo, si ha:

$$L_n = L_{n+1}\cos\theta_{n+1}$$

Sostituendo nella prima relazione il risultato della seconda, poi quello della terza e ripetendo il procedimento fino all'inserimento del valore di L_{n-1} si ottiene:

$$L = L_1\cos\theta_1 = L_2\cos\theta_2\cos\theta_1 = ... = L_n\cos\theta_n\cos\theta_{n-1}....\cos\theta_1$$

Da essa si ricava la seguente relazione:

$$L_n = \frac{L}{\prod_{i=1}^{n}\cos\theta_i} \qquad \texttt{[002]}$$

Troviamo il valore della produttoria. Consideriamo l'identità trigonometrica (formula di duplicazione del seno):

$$\operatorname{sen}\alpha = 2\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$$

Applicando tale formula ricorsivamente all'ultimo fattore n volte si trova:

$$\operatorname{sen}\alpha = 2\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{4} = ... = 2^n\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2^n}\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^i}$$

Consideriamo ora il caso particolare $\boldsymbol{\alpha = \pi/2}$. Essendo ***sen(π/2) = 1***, si ottiene:

$$1 = 2^n\operatorname{sen}\frac{\pi}{2^{n+1}}\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{\pi}{2^{i+1}}$$

Ricordando che $\boldsymbol{\pi/2^{n+1} = \theta_n}$, si ha:

$$\prod_{i=1}^{n}\cos\theta_i = \frac{2\theta_n}{\pi\operatorname{sen}\theta_n}$$

Inserendo questo risultato nell'equazione `[002]` si ricava:

$$L_n = \frac{\pi\operatorname{sen}\theta_n}{2\theta_n}L \qquad \texttt{[003]}$$

La relazione (1) perciò diventa:

$$x_n = L_n\cos\theta_n = \frac{\pi\operatorname{sen}\theta_n\cos\theta_n}{2\theta_n}L$$

Per trovare l'ascissa ***X*** "dell'ultimo" punto dobbiamo considerare il seguente limite:

$$X = \lim_{\theta_n \to 0} x_n = \frac{\pi}{2} L \lim_{\theta_n \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta_n \cos\theta_n}{\theta_n}$$

Sfruttando il limite notevole $\operatorname{sen}\theta_n/\theta_n = 1$, si ottiene infine:

$$X = \frac{\pi}{2} L$$

Per determinare la funzione passante per tutti i vertici retti dei triangoli basta osservare che l'equazione `[003]` mette in relazione la distanza dall'origine (L_n) del punto P_n con l'angolo (θ_n) che essa forma con l'asse delle x. Essa perciò rappresenta, in coordinate polari, l'equazione della curva cercata. Ponendo $L_n=r$ e $\theta_n=\theta$ si ha:

$$r = \frac{\pi \operatorname{sen}\theta}{2\theta} L$$

Questa curva è nota col nome di cocleoide.

Zar, dopo averci mandato svariati accidenti, ha ammesso di essersi divertito:

Bellissimo quesito, che mi ha fatto diventare matto per quella maledetta formula ricorsiva... Ma partiamo dall'inizio *[Momento di pubblicità: Zar, se non ricordiamo male, "OpenOffice" te lo avevamo, a suo tempo, presentato e ne eri rimasto entusiasta. È uscita la versione 2.0, che fa anche il caffè all'italiana (RdA)].*

Prima premessa importante.

Ogni volta costruiamo un triangolo rettangolo di cui conosciamo un cateto e il suo angolo adiacente, e di cui vogliamo trovare l'ipotenusa. Se indichiamo con a_n il cateto noto, con a_{n+1} l'ipotenusa incognita, e con ϑ l'angolo adiacente al cateto noto, abbiamo la relazione seguente:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\cos\vartheta}.$$

In particolare, abbiamo che:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \\ a_2 &= \frac{a_1}{\cos\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}} \\ &\dots \\ a_n &= \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\dots\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}} \end{aligned}$$

È bello[21] osservare che, grazie alla formula di bisezione per il coseno, l'espressione precedente può essere scritta così:

[21] Evidentemente per Zar l'intersezione tra l'insieme dei tipografi e quello degli insegnanti di arti marziali è vuoto. Altrimenti non si sarebbe spinto a temerarie affermazioni di questo genere.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1+\frac{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}}{2}}\ldots}$$

Veniamo ora alla

Seconda premessa importante.

Quella che mi ha fatto diventare matto e per la quale ho ricevuto un piccolo aiuto da Wikipedia (diamo a Cesare quel che è di Cesare).

Ricordiamo la formula di bisezione per il seno:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

e applichiamola un pò di volte sin quando non abbiamo capito come va a finire:

$$\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x = 2(2\sin x \cos x)\cos 2x = 2^2 \sin x \cos x \cos 2x$$
$$\sin 8x = 2\sin 4x \cos 4x = 2^3 \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x$$

penso che si sia capito come funziona: applicando tante volte la duplicazione del seno, si ottiene una potenza di 2, un seno, e un prodotto di coseni di argomento sempre uno doppio dell'altro[22]. La formula finale è quindi questa:

$$\sin(2^n x) = 2^n \sin x \prod_{i=0}^{n-1} \cos(2^i x)$$

Da qui, meravigliosamente, riusciamo a ricavare quell'orribile prodotto:

$$\prod_{i=0}^{n-1} \cos(2^i x) = \frac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}$$

e questa formula si chiama **formula di Viète**[23]

Ora procediamo tranquilli con alcune sostituzioni per trasformare questa formula in una forma più comoda per i nostri calcoli.

Sostituendo $y = 2^n x$ abbiamo:

$$\prod_{i=0}^{n-1} \cos\left(2^i \frac{y}{2^n}\right) = \frac{\sin y}{2^n \sin \frac{y}{2^n}}$$

Ora facciamo attenzione all'argomento del coseno: questo può essere scritto come $\frac{y}{2^{n-1}}$ e, siccome l'indice va da ***0*** a ***n-1***, esso può assumere i seguenti valori: $\frac{y}{2^n}, \frac{y}{2^{n-1}}, \ldots, \frac{y}{2}$ e il prodotto può essere "girato" e trasformato così:

[22] Per ulteriori delucidazioni, aspettate che Alice abbia finito il trasloco. Poi, però, non lamentatevi se vi liquida con un "Ma è evidente!". Per lei lo è, per il resto del mondo no.

[23] *Checchè ne dica Doc, fa il paio con la "Megan Gale della matematica" (RdA)*

$$\prod_{i=0}^{n-1}\cos\left(\frac{y}{2^{n-1}}\right)=\prod_{i=0}^{n-1}\cos\frac{y}{2^i}$$

Riprendiamo ora la formula di Viète e dividiamo a destra e a sinistra dell'uguale per $\cos\frac{y}{2}$:

$$\prod_{i=2}^{n}\cos\frac{y}{2^i}=\frac{\sin y}{2^n\sin\frac{y}{2^n}\cos\frac{y}{2}}$$

Poi applichiamo la formula di duplicazione del seno, ma scritta questa volta così

$$\sin y = 2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}$$

semplificando il semplificabile otteniamo:

$$\prod_{i=2}^{n}\cos\frac{y}{2^i}=\frac{2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}}{2^n\sin\frac{y}{2^n}\cos\frac{y}{2}}\frac{2\sin\frac{y}{2}}{2^n\sin\frac{y}{2^n}}$$

facendo un'ultima sostituzione $y=\pi$:

$$\prod_{i=2}^{n}\cos\frac{\pi}{2^i}=\frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{2^n\sin\frac{\pi}{2^n}}=\frac{2}{2^n\sin\frac{\pi}{2^n}}$$

Ecco trovata, finalmente, un'espressione decente per il prodotto trovato nella prima premessa importante.

Calcolo dell'ascissa dell'ultimo cubetto rosso.

Possiamo ora, finalmente, rispondere alla prima domanda del quesito: qual è l'ascissa dell'ultimo cubetto rosso?

Ricordando (scuole superiori) il limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\,,$$

possiamo calcolare la lunghezza richiesta:

$$\frac{1}{l}=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=2}^{n}\cos\frac{\pi}{2^i}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2^n\sin\frac{\pi}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2^n\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}\frac{\pi}{2^n}}=\frac{2}{\pi}$$

E quindi il risultato finale è $l=\frac{\pi}{2}$

La curva.

Ora cerchiamo di ricavare l'equazione della curva passante per tutti i puntini rossi: viene naturale cercare l'equazione in forma polare $\rho = \rho(\vartheta)$.

Se $\vartheta = \frac{\pi}{2^{n+1}}$, risulta che:

$$\rho(\vartheta) = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\ldots\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{2}{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{2}{\frac{\pi}{\vartheta}\sin\vartheta} = \frac{2\vartheta}{\pi\sin\vartheta}$$

E questa non è una curva qualsiasi: si chiama **quadratrice di Ippia**, ed è stata usata anche per trisecare gli angoli (o dividerli in un qualunque numero di parti) e per quadrare il cerchio

Grande, come sempre. Anche ***Michele*** ci manda una soluzione sostanzialmente coincidente per quanto riguarda la posizione del quadretto rosso arrivando alla medesima formula di Zar dichiarando poi che quella formula, *"come è ben noto"* (e ammette il bluff) converge.

Pubblichiamo anche (parte del)la soluzione di ***µ6***, in quanto è stato l'unico a provare a fare un disegno: tagliamo la parte "calcolosa", in quanto facilmente deducibile dagli insulti di Zar.

Devo dire che questo problema ha generato un po' di fermento tra me e i miei colleghi (d'altra parte la matematica è bello farla in gruppo), e dopo essere passati tra produttorie infinite, prostaferesi generalizzate e altre bestie del genere siamo arrivati ad una soluzione che mi sembra elementare. Sono contento, perché ho imparato un po' di cose...

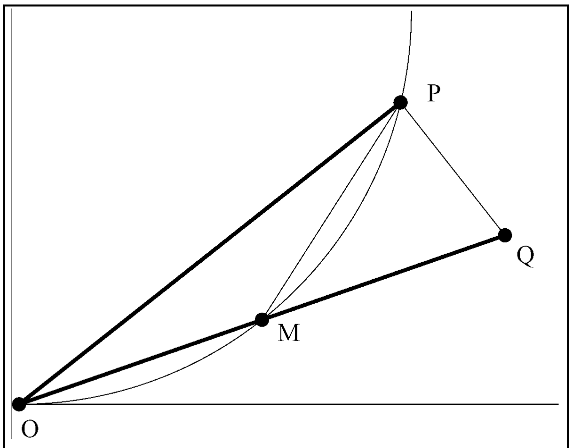


Figura 2 - La "cocleoide"

Mi aiuto col disegno qui di fianco, da cui si capisce facilmente che, se M è il punto medio dell'arco di circonferenza OMP e l'angolo OPQ è retto, allora M è anche il punto medio del segmento OQ. Basta infatti notare che gli angoli MPQ e MQP sono complementari ai due angoli uguali MOP e MPO, e dunque MQ=MP=MO. In particolare, OQ=OM+MP.

Consideriamo che P e Q possono essere due punti successivi della successione di cubetti rossi, perché l'angolo in P è retto e POQ è la metà dell'angolo di PO con l'asse x. Se si parte dal cerchio di centro (0,1) e raggio 1 e P è il primo punto della sucessione, il segmento OP è il lato del quadrato inscritto nel cerchio, e il segmento OQ è 2 volte il lato dell'ottagono inscritto nel cerchio. Partendo ora da OQ e ripetendo il ragionamento dimezzando l'angolo, si avrà che il segmento successivo nella successione dei cubetti rossi è lungo 4 volte il lato del poligono di 16 lati inscritto, e così via.

Si noti che aumenta il numero di lati del poligono inscritto, ma le cose son fatte in modo che si considera sempre quella parte del perimetro che comincia nell'origine e finisce in (1,1).

Quindi se P_k è il k-esimo punto della successione, il segmento OP_k è lungo come quella parte del poligono di 2^{k-1} lati che sta nel quarto di circonferenza. Mandando al limite il procedimento si ottiene che la distanza del punto limite dall'origine (che è poi la sua ascissa) vale come il quarto di circonferenza di raggio 1, ovvero $\frac{\pi}{2}$.

Ora vogliamo trovare l'equazione di una curva che passa per tutti i punti. Nella nostra costruzione, il lato del poligono di lati vale per il teorema della corda

$$l_k = 2\sin 2^{-k}\pi$$

e $\vartheta = 2^{-k}\pi$ è proprio l'angolo tra l'asse x e il segmento . Quindi vengono comode le coordinate polari e si ha

$$\rho = 2^{k-2} l_k = 2^{k-1}\sin 2^{-k}\pi = \frac{\pi}{2}\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}$$

Per capire di che curva si trattasse, la rete mi è stata di fondamentale aiuto. Solo grazie a Google, sfruttando l'intuizione di un amico che vedeva in questa curva qualcosa di collegato alla quadratrice di Ippia (certe intuizioni hanno del fenomenale), ho trovato che il suo nome è "cocleoide". E qui mi fermo

Per altra strada arriva al risultato ***Cid*** (il quale ci segnala un paio di errori di battitura che cerchiamo di correggere... Non garantiamo)

La prima cosa che ho notato è che avendo a che fare con gli angoli, conviene affrontare il problema utilizzando le coordinate polari (R,θ)

In base al sistema proposto da Alberto, i cubetti rossi sono disposti lungo una successione di punti $S_n = (R_n, \theta_n)$ che ha le coordinate seguenti.

$$S_1 = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$S_{n+1} = \left(\frac{R_n}{\cos\theta_{n+1}}, \frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

In quanto i cubetti rossi S_n e S_{n+1} sono uniti dal cateto di un triangolo rettangolo avente ipotenusa uguale a R_{n+1} e l'altro cateto uguale a R_n mentre l'angolo compreso tra l'ipotenusa e il cateto uguale a R_n è uguale a θ_{n+1}

Per cui si ha $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$ e $\qquad R_{n+1} = \frac{R_n}{\cos\theta_{n+1}}$

A questo punto ricavo $S_0 = (R_1 * \cos\theta_1, \theta_1 * 2) = \left(\sqrt{2} * \cos\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} * 2\right) = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

Mentre per trovare l'ascissa dell'ultimo cubetto rosso, ho notato che essa coincide con R_∞, in quanto all'infinito si annulla l'angolo θ e quindi R coincide con l'ascissa.

Dalla successione S_n si ricava quindi che l'ascissa dell'ultimo cubetto rosso vale:

$$R_{\infty} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2^{i+1}}}$$

facendo qualche conto ho formulato l'ipotesi che tale ascissa valga $R_{\infty} = \frac{\pi}{2}$ quindi, per ora, la funzione che passa per tutti i punti rossi è:

$$R_{n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2^{i+1}}}$$

Ebbene, giunto a questo punto ho notato una similitudine tra R_n e $\frac{\sin\theta}{\theta}$

Ecco cio che ho notato: per $\theta = 0$ si ha $R_{\infty} = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1 = \frac{\pi}{2} * \frac{2}{\pi}$$

per $\theta = \frac{\pi}{4}$ si ha $R_1 = \sqrt{2}$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{4}{\pi} = \sqrt{2} * \frac{2}{\pi}$$

per $\theta = \frac{\pi}{2}$ si ha $R_0 = 1$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} = 1 * \frac{2}{\pi}$$

Da cui è facile formulare l'ipotesi che la funzione che passa per tutti i cubetti rossi sia (in coordinate polari): $R = \frac{\pi}{2} * \frac{sen\theta}{\theta}$

A questo punto tocca dimostrarlo:

Dimostrazione per induzione

Dimostro che

$$R_{n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2^{i+1}}} = \frac{\pi}{2} * \frac{sen\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

Comincio dimostrando che vale per n=1

$$R_1=\prod_{i=1}^{1}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{i+1}}}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$$\frac{\pi}{2}*\frac{sen\frac{\pi}{2^{1+1}}}{\frac{\pi}{2^{1+1}}}=\frac{\pi}{2}*\frac{sen\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}*\frac{4}{\pi}*\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2*\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

Ora dimostro che se vale per i = n, allora vale anche per i = n + 1

$$R_{n+1}=\prod_{i=1}^{n+1}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{i+1}}}=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{i+1}}}*\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1+1}}}$$

Per l'ipotesi che valga per i = n abbiamo che:

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{i+1}}}=\frac{\pi}{2}*\frac{sen\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

quindi,

$$R_{n+1}=\frac{\pi}{2}*\frac{sen\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}*\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}}$$

Per la formula di duplicazione: sen (2*x) = 2*sen x * cos x , abbiamo che:

$$sen\frac{\pi}{2^{n+1}}=2*sen\frac{\pi}{2^{n+2}}*\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

da cui, tenendo conto che $\frac{\pi}{2^{n+1}}=2*\frac{\pi}{2^{n+2}}$:

$$R_{n+1}=\frac{\pi}{2}*\frac{2*sen\frac{\pi}{2^{n+2}}*\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}}{2*\frac{\pi}{2^{n+2}}}*\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}}$$

semplificando, si ottiene infine:

$$R_{n+1}=\frac{\pi}{2}*\frac{sen\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+2}}}$$

Quindi risulta dimostrato che:

1) L'ascissa dell'ultimo cubetto rosso è: $\frac{\pi}{2}$, in quanto per $n \to \infty$ si ha che $\frac{\pi}{2^{n+1}} \to 0$ e quindi essendo: $\lim_{\theta \to 0} \frac{sen\theta}{\theta} = 1$, si ricava che $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} * \frac{sen\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{\pi}{2}$

2) Una funzione che passa per tutti i cubetti rossi è (in coordinate polari): $R = \frac{\pi}{2} * \frac{sen\theta}{\theta}$, verificato tramite la dimostrazione per induzione.

3) I cubetti sono in numero infinito, ma la lunghezza del sentiero proposto da Alberto non è infinita, in quanto la funzione che corrisponde all'insieme dei segmenti compresi tra i cubetti rossi è una funzione biunivoca tra x e y, nell'intervallo:

$[0,1]$ per la coordinata y

e

$[0, \frac{\pi}{2}]$ per la coordinata x

e pertanto essendo una funzione biunivoca tra x e y in un intervallo finito, non può avere lunghezza infinita (una qualsiasi funzione biunivoca compresa tra $[X_1, X_2]$ per la x e $[Y_1, Y_2]$ per la y vale al massimo: $Abs(X_1 - X_2) + Abs(Y_1 - Y_2)$)

Adesso, però, parliamo d'altro.

5. Quick & Dirty

Anche quest'anno abbiamo fatto l'ultimo fine settimana al Paesello[24] E, logicamente, ne è nato un problema.

Le Pesti hanno organizzato una corsa campestre (di quelle che all'arrivo devi passare i partecipanti sotto un getto d'acqua, per evitare di arrivare a casa e, successivamente al bagno, accorgerti che hai preso il figlio di un altro... e lui zitto!), anche se bisogna ammettere che i nostri Validi Assistenti non si sono comportati proprio benissimo.

Infatti Fred, che è quello che si è piazzato meglio, si è posizionato esattamente a metà classifica; Alberto si è piazzato decimo e Luigi (il loro amico-di-pizza-delle-dieci-di-mattina) sedicesimo.

...ma secondo voi, quanti corridori c'erano?

6. Pagina 46

Verifichiamo separatamente i casi per ***n*** pari o dispari:

[24] Quello del Divano Quantistico: l'ultimo week-end è, per definizione, quello in cui si spegne il riscaldamento che verrà riacceso in occasione della settimana sciistica.

Per *n* pari:

Costruiamo la linea spezzata $A_1A_2\dots A_n$ tale che i segmenti $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n+1}A_{n+2}}$ siano di lunghezza unitaria e perpendicolari l'uno rispetto al successivo, come indicato in ***Figura 1*** dove è esemplificato il caso ***n=4***.

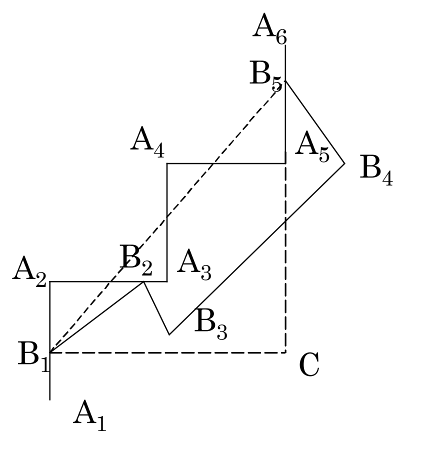


Figura 1 - Il caso n=4

Su ogni segmento $\overline{A_iA_{i+1}}$ o sulla sua estensione poniamo un punto B_i tale che $\overline{B_iA_{i+1}} = a_i$, assumendo per l'ultimo valore $\overline{B_{n+1}A_{n+2}} = a_1$. Si noti che il punto B_i si trova alla sinistra (o al di sotto) del punto A_{i+1} se $a_i > 0$, alla destra (o al di sopra) nel caso contrario.

Se connettiamo i punti B_i e formiamo la spezzata, dal Teorema di Pitagora si ha:

$$\overline{B_iB_{i+1}} = \sqrt{\overline{B_iA_{i+1}}^2 + \overline{B_{i+1}A_{i+1}}^2}\ .$$

Ossia, essendo $\overline{B_iA_{i+1}} = a_i$ e $\overline{B_{i+1}A_{i+1}} = |1 - a_{i+1}|$:

$$\overline{B_iB_{i+1}} = \sqrt{a_i^{\ 2} + (1 - a_{i+1})^2}\ .$$

Ossia la somma che intendiamo valutare è pari alla lunghezza della spezzata $B_1B_2\dots B_{n+1}$.

La lunghezza di questa spezzata è sicuramente maggiore o uguale alla lunghezza del segmento B_1B_{n+1}; prendendo in considerazione il triangolo B_1CB_{n+1} e ricordando che i segmenti $\overline{A_iA_{i+1}}$ sono di lunghezza unitaria, abbiamo:

$$\overline{B_1C} = \overline{A_2A_3} + \overline{A_4A_5} + \dots + \overline{A_nA_{n+1}} = \frac{n}{2}$$

e

$$\overline{CB_{n+1}} = \overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4} + \dots + \overline{A_{n-1}A_n} = \frac{n}{2},$$

da cui segue

$$\begin{aligned}\overline{B_1B_{n+1}} &= \sqrt{\overline{B_1C}^2 + \overline{CB_{n+1}}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2} \\ &= \frac{n\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

che è l'ipotesi.

L'uguaglianza si ha quando i punti $B_1, B_2, \ldots, B_n$ si trovano sul segmento $\overline{B_1 B_{n+1}}$; poichè il segmento $\overline{B_1 B_{n+1}}$ forma un angolo di 45° con il segmento $\overline{B_1 C}$, deve essere:

$$\overline{B_1 A_2} = \overline{A_2 B_2} = \overline{B_2 A_4} = \overline{A_4 B_4} = \ldots = \overline{B_{n-1} A_n} = \overline{A_n B_n}$$

o, equivalentemente,

$$a_1 = (1 - a_2) = a_3 = (1 - a_4) = \ldots = a_{n-1} = (1 - a_n).$$

Quindi per ***n pari*** l'uguaglianza si ha per:

$$a_1 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = a,$$
$$a_2 = a_4 = \ldots = a_n = 1 - a$$

dove ***a*** è un valore qualsiasi.

Per *n* dispari

Sia:

$$a_{n+1} = a_1,$$
$$a_{n+2} = a_2,$$
$$\ldots$$
$$a_{2n} = a_n$$

e consideriamo la somma:

$$\sqrt{a_1^2 + (1 - a_2)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1 - a_3)^2} + \ldots + \sqrt{a_{2n-1}^2 + (1 - a_{2n})^2} + \sqrt{a_{2n}^2 + (1 - a_1)^2} \ ,$$

pari al ***doppio*** della somma che stiamo studiando.

Questa nuova somma ha un numero ***pari*** di termini per costruzione, quindi deve essere:

$$\sqrt{a_1^2 + (1 - a_2)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1 - a_3)^2} + \ldots + \sqrt{a_{2n-1}^2 + (1 - a_{2n})^2} + \sqrt{a_{2n}^2 + (1 - a_1)^2} \leq \frac{2n\sqrt{2}}{2}.$$

Segue quindi che ***metà*** della sommatoria considerata rispetta la regola data; in particolare, si ha l'uguaglianza per:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \frac{1}{2}.$$

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Era meglio se era piatta

Se prendete una cartina degli Stati Uniti e la aprite e chiudete molte volte, Fargo si perde nella piega centrale. Anche se questo metodo può sembrare approssimativo, permette di dire agli abitanti di Fargo, al di là dell'evocazione del nome, che sono il centro degli Stati Uniti

John Steinbeck, *Viaggio con Charley*

Tra i vari dati calcolati dall'Ufficio del Censimento degli Stati Uniti d'America, uno ci ha sempre colpito: il "centro della popolazione", ossia il calcolo del baricentro del sistema di punti composto dagli abitanti degli Stati Uniti (escluse Alaska e Hawaii) considerati tutti di peso unitario (esclusa l'influenza McDonald).

È possibile calcolare questo dato dal primo censimento (1790), anche se i primi dati sono piuttosto approssimativi; il perfezionarsi di questi dati ha però scatenato un *querelle* tra gli statistici dell'Census Bureau e l'American Mathematical Society su come debba essere calcolato questo valore e se i primi hanno dalla loro Hollerith[25], i secondi possono sfoderare un gigante del calibro di Gauss.

Vediamo prima la soluzione, poi parleremo del problema. Nella ***Figura 1*** (che a noi sembra piuttosto impressionante) vedete lo spostarsi del centro della popolazione attraverso gli anni secondo il Census Bureau (quadratini) e secondo l'American Mathematical Association (triangoli); anche se all'inizio vanno piuttosto d'accordo, con la "Corsa all'Ovest" i due dati cominciano a divergere in modo abbastanza sostanziale[26].

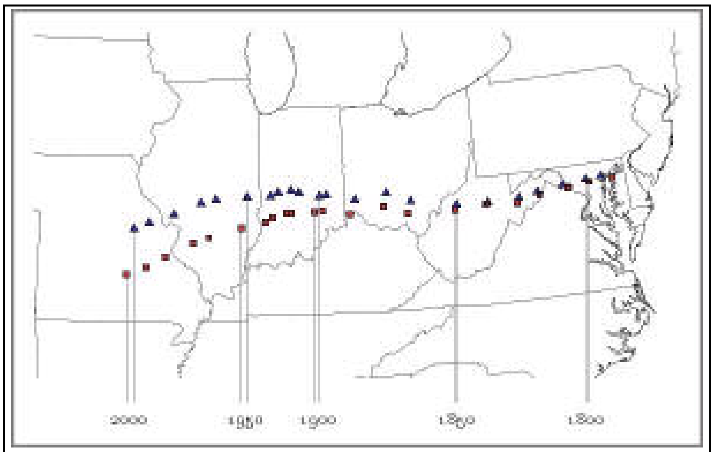


Figura 1 - I Centri della Popolazione

Il motivo? La curvatura terrestre. Il Census Bureau non ne tiene molto conto.

[25] Personaggio che ci sta piuttosto simpatico: le prime esperienze di programmazione di due redattori avvenivano perforando schede con il "codice Hollerith" e, inoltre, ci permette di inserire in calendario un compleanno anche negli anni bisestili.

[26] Un paio di aneddoti: nei primi censimenti si cercavano sei informazioni per ogni residenza: maschi e femmine maggiori e minori di sedici anni, altre persone libere, schiavi: gli indiani, come emerge dal disegno, non erano conteggiati.

La città di Steelville (Missouri) che nel censimento del 1990 si è ritrovata ad ospitare il "Centro" secondo il Bureau ha ritenuto opportuno festeggiare l'evento con una lapide nel parco cittadino; non ci risulta che Edgar Springs (Missouri), centro nel censimento del 2000, abbia ritenuto opportuno festeggiare.

Infatti, ogni mappa di una parte consistente della Terra rappresentata su una superficie piana distorcerà in un qualche modo le distanze tra i punti. Questo, nel calcolo del baricentro, diventa di fondamentale importanza, ma non anticipiamo gli eventi.

Questa proprietà delle mappe nasce da un interessante teorema di Gauss; questo teorema gli era talmente simpatico che ha deciso di chiamarlo ***Theorema Egregium***. Quello che cerca di fare il Nostro è di misurare quanto sia curva una superficie bidimensionale posizionata in uno spazio tridimensionale.

Per prima cosa, consideriamo la nostra superficie e i vettori (unitari) ***N*** che in ogni punto della superficie siano ad essa perpendicolari; supponendo di trovarci in un punto ***P*** e volendo misurare la curvatura della nostra superficie, possiamo immaginare di spostarci in una qualche direzione con velocità ***v***; man mano che ci muoviamo, il vettore ***N*** che ci accompagna cambia direzione; in particolare, possiamo definire $S_p(v)$ come il vettore che misura la derivata di ***N*** lungo il nostro percorso.

Ora, se $S_p(v)$ è ***parallelo*** a ***v***, chiamiamo ***v*** *direzione principale*; questo significa che i nostri aggeggi sono l'uno proporzionale all'altro, ossia che:

$$S_p(v) = k_v v \qquad [001]$$

e possiamo chiamare il termine k_v ***curvatura principale***.

"Si, ma questo aggeggio dipende dal *percorso*..." Vero, come si vede in ***Figura 2*** ("presa in prestito" dal sito dell'AMS), ci sono sempre ***due*** direzioni principali in un punto dato; quindi, se i due vettori sono ***v*** e ***w***, esprimiamo la ***Curvatura Gaussiana*** come:

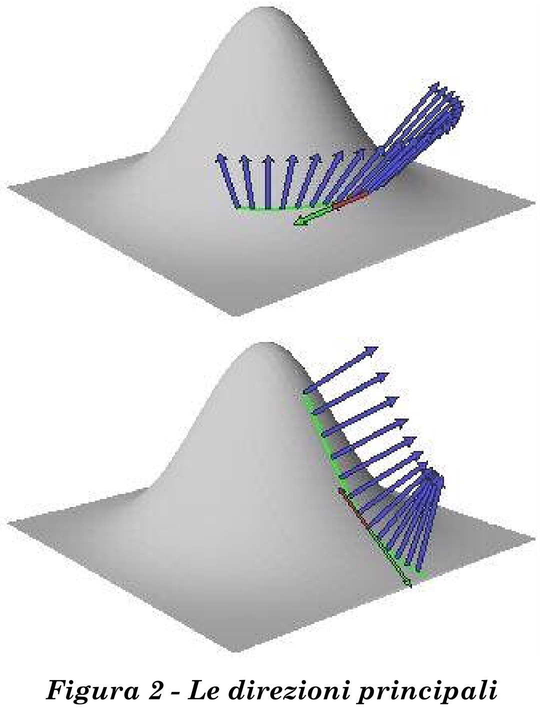


Figura 2 - Le direzioni principali

$$K(p) = k_v k_w \qquad [002]$$

Se la cosa vi sembra troppo semplice, stiamo parlando di una trasformazione lineare simmetrica dallo spazio tangente in se stesso e la curvatura gaussiana non è altro che il prodotto dei due autovalori; potete anche calcolare una *curvatura media* prendendo la media dei due valori.

Complicato? Tranquilli, qualche esempio potrà portarci ad interessanti scoperte.

Non credo abbiate grossi problemi a fare il calcolo per il ***piano***: i nostri vettori normali ***N*** sono costanti, ogni direzione è la direzione principale e abbiamo che la curvatura principale è zero, ossia $K_{piano}(p) = 0$.

Lo stesso ragionamento nei confronti di una ***sfera*** ci porta a dire che ogni direzione è una direzione principale con curvatura pari all'inverso del raggio della sfera, e quindi

$$K_{sfera}(p) = k_v k_w = \frac{1}{r}\frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \qquad [003]$$

Se la cosa comincia a sembrarvi troppo semplice, consideriamo il ***cilindro***: qui le direzioni principali sono due, una giacente sulla superficie del cilindro e parallela al suo asse, l'altra tangente al cerchio che è sezione del cilindro; tagliando un pò per i campi, una si comporta come quella del piano, l'altra come quella della sfera. Ma siccome la prima è ***0***, anche qui avremo $K_{cilindro}(p) = 0$.

E allora, dov'è il problema? Beh, è nel Theorema Egregium: ***Qualunque funzione tra superfici che conservi le distanze tra i punti deve anche conservare la curvatura gaussiana***.

Visualizziamo in un qualche modo il il guaio: non so voi, ma io ho un ricordo della tenera età dal mio Atlante Geografico DeAgostini, ultima pagina, dove venivano spiegate le proiezioni cartografiche: cerco di rappresentare la cosa qui di fianco, in ***Figura 3***.

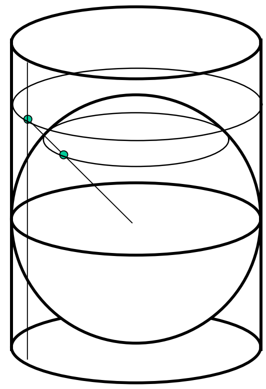


Figura 3 - Un lontano ricordo

Per prima cosa si prende la Terra (sfera al centro) e la si piazza dentro un cilindro; poi si tira un raggio terrestre passante per il punto che ci interessa e lo si prosegue sino al cilindro, dove si segna il punto; indi, si apre il cilindro e si guarda cosa viene fuori (un altro vago ricordo è che questa sia una proiezione di Mercatore, ma non garantisco). È abbastanza evidente[27] che i paralleli (ve ne ho indicato uno) diventano cerchi sul cilindro e i meridiani (non indicato sulla sfera) diventano rette (quella la trovate sul cilindro). L'ultimo passaggio (segare il cilindro e metterlo sul piano) non dà problemi, visto che hanno entrambi curvatura zero; il guaio è che *perdete qualcosa nella proiezione dalla sfera al cilindro;* e quindi dal Teorema Egregio non conservate la distanza tra i punti (conservate un mucchio di altre cose interessanti, ma questa è un'altra storia).

Fortunatamente, esistono proiezioni che, almeno per quello che ci interessa, funzionano un pochino meglio: quando abbiamo parlato della visione del mondo da parte del Census Bureau abbiamo detto "*quasi* piatta", infatti la proiezione che loro utilizzano per "spianare" gli Stati Uniti è la *Proiezione sinusoidale di Sanson-Flamsteed*: non stiamo a farvi il disegno, ci limitiamo a dire che richiede la definizione di un *meridiano centrale* λ_0 a fare da centro della mappa e, se rappresentiamo con ϕ la latitudine e con λ la longitudine del punto, la mappa si ricava direttamente nel piano ***x-y*** come:

$$\begin{aligned} x &= (\lambda - \lambda_0)\cos\phi \\ y &= \phi \end{aligned} \qquad \textbf{[004]}$$

che viene decisamente semplice da calcolare, ed ha alcune caratteristiche piuttosto interessanti: per fare qualche esempio, punti ad uguale latitudine si trovano sulla stessa linea orizzontale; inoltre, le lunghezze dei paralleli sono rappresentate nella corretta proporzione; infine (e questo era importante per il Census Bureau) regioni con la stessa area sulla Terra appaiono con la stessa area sulla mappa.

"...Carino, e come viene la Terra?" Sapevo che l'avreste chiesto; la trovate in ***Figura 4***, in cui in una visione meno Giorginocentrica (nel senso di Georgie Bush) dell'universo abbiamo preso il meridiano di Greenwich come principale[28].

[27] Metodo da ***non*** usare: "Data una sfera di equazione $x^2+y^2+z^2=R^2$ e un cilindro $x^2+y^2=R^2$, la retta passante per l'origine e il punto ha equazione...." eccetera. Perdita di tempo indicibile, con un pò di trigonometria tutto viene praticamente immediato *[...me ne sono accorto in tarda età, purtroppo... (RdA)]*.

[28] Mappa generata attraverso il software MicroCAM, gratuitamente reperibile in rete. Molto divertente.

Allora, dov'è il busillis? Semplicemente, il Census Bureau usa questa proiezione, mentre l'AMS, conscio dell'irreproducibilità sul piano del settore sferico occupato dagli Stati Uniti, usa i punti sulla superficie sferica per calcolarne il baricentro; per questo stanno litigando.

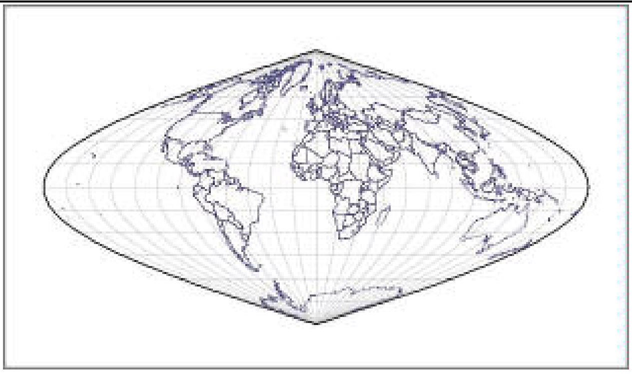


Figura 4 - Home, sweet home

Ora potete scegliere tra tre conclusioni diverse:

Sappiamo che alcuni lettori hanno grossa familiarità con la cartografia; secondo voi, dov'è il baricentro della popolazione per l'Italia? È abbastanza probabile che, dovendo considerare la Sardegna e la Sicilia, sia in un posto piuttosto umido, ma "a occhio", anche non tenendone conto, mi sa che finiamo sul bagnato...

Ma secondo voi, qual'è il baricentro dei lettori di RM? Qui, probabilmente sono gli amici australiani, a combinare dei guai.

Ho il lontano ricordo di un brevissimo racconto di fantascienza in cui degli alieni lasciavano una targa su un vecchio ceppo di albero; in migliaia di lingue, sulla targa era scritto: "Centro dell'Universo. Rilevamento numero..., Anno....". Il titolo era: *Quando siete stati in equilibrio sul ceppo al centro dell'universo che altro vi resta da fare?*[29].

Rudy d'Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms

[29] **Autore: Grant Carrington - Titolo originale:** After you've stood on the Log at the center of the Universe, what is there left to do? Anno 1974. Pubblicato, in italiano, nel volume di Urania "Microfantascienza: altre 44 microstorie" *[Doc, Comunicazione personale].*