Luca Lussardi

IL METODO DELLE SECANTI

GENNAIO 2005 - SxT Scaffali N°1

Il metodo delle secanti

8 Gennaio 2005

Il metodo delle secanti è un metodo iterativo atto alla risoluzione numerica di equazioni non lineari della forma

$$f(x) = 0$$

con f funzione qualunque. Molti dei metodi iterativi per la risoluzione di equazioni non lineari rientrano in uno schema comune: la forma, per così dire canonica, con la quale viene scritto un metodo iterativo è la seguente

$$x_{h+1} = g(x_h)$$

con g funzione opportuna. Fissando un punto di partenza iniziale x_0, il metodo iterativo impostato permette di trovare x_1, x_2, ecc... Se la successione x_h così trovata converge ad un certo α, allora, se g è almeno continua, si ha

$$\alpha = g(\alpha)$$

Per cui abbiamo risolto, in modo iterativo, un problema di punto fisso. Un celebre Teorema di punto fisso afferma (non lo scrivo nella forma più generale possibile) che se g è continua e derivabile, con

$$|g'(x)| < 1$$

allora la successione generata dal metodo converge all'unico punto fisso per g.

Data l'equazione $f(x) = 0$, isoliamo anzitutto una sua radice (ad esempio con il metodo della bisezione); dunque sia da ricercare l'unica radice α di $f(x) = 0$ nell'intervallo $[a, b]$. Fissiamo $c \in [a, b]$. Definiamo il metodo iterativo

$$x_{h+1} = x_h - \frac{f(x_h)(x_h - c)}{f(x_h) - f(c)}$$

Il significato geometrico è il seguente: ad un generico passo h si considera la retta che congiunge i punti $(x_h, f(x_h))$ e $(c, f(c))$; si pone poi x_{h+1} come zero di questa retta secante.

Ponendo

$$g(x) = x - \frac{f(x)(x-c)}{f(x) - f(c)}$$

trasformiamo il metodo iterativo dato nella forma normale a noi nota. Per concludere sulla convergenza del metodo delle secanti basta quindi applicare il Teorema di punto fisso citato alla funzione g.

Quanto all'ordine di convergenza, solitamente (a meno di una scelta molto particolare e non sempre fattibile di c, che tralascio) il metodo ha convergenza lineare, in quanto si verifica la condizione $g'(\alpha) \neq 0$. Se si verifica questa condizione allora si ha (in ipotesi di Teorema di punto fisso, e quindi di convergenza)

$$\lim_{h \to +\infty} \frac{|x_{h+1} - \alpha|}{|x_h - \alpha|} = \lim_{h \to +\infty} \frac{|g(x_h) - g(\alpha)|}{|x_h - \alpha|} = |g'(\alpha)| \in (0, 1)$$

È quindi evidente che la l'errore non diminuisce di molto all'aumentare dei passi dell'iterazione, in quanto il rapporto tra due errori consecutivi tende ad essere costante.

Infine ricordo che esiste una variante del metodo delle secanti, che è il metodo delle secanti a due punti, che però non rientra nello schema iterativo generale trattato, per cui necessiterebbe di uno studio di convergenza ad hoc.