Pasquale Catone

L'ACCELERAZIONE TANGENZIALE

DICEMBRE 2004 - SxT Scaffali N°6

L'accelerazione Tangenziale

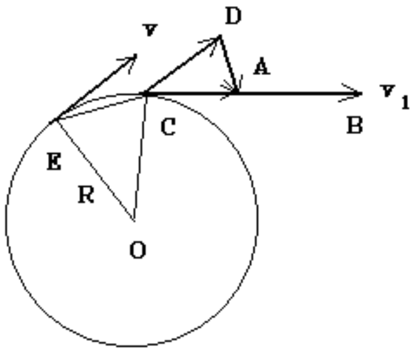


Fig.1

La variazione della velocità di un corpo in moto su una circonferenza di raggio R (fig.1) risulta $\overrightarrow{\mathbf{v_1}} - \overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{CA}} + \overrightarrow{\mathbf{AB}} - \overrightarrow{\mathbf{v}}$, dove CA = v. Il vettore $\overrightarrow{\mathbf{CA}} - \overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{DA}}$, per brevi intervalli di tempo, tende ad essere perpendicolare alla traiettoria e produce l'accelerazione centripeta ac = v^2/R, che ha la direzione radiale verso O, come si può stabilire facilmente dalla similitudine dei triangoli CDA e OCE, oppure dalla risposta n.72. Il segmento AB = $v_1 - v$, rapportato al tempo infinitesimo dt in cui si forma, equivale alla componente dell'accelerazione tangente alla traiettoria at = dv/dt. La componente at scaturisce dalla variazione del modulo della velocità ed ha segno concorde o discorde a v, secondo che v sia crescente o decrescente rispettivamente. In particolare nel moto circolare uniforme, la velocità è costante in modulo e di conseguenza si annulla l'accelerazione tangenziale. Nel moto circolare si ottiene anche che at = $\alpha\mathbf{R}$, dove $\alpha = \mathbf{d}\omega / \mathbf{dt}$ è l'accelerazione ed ω è la velocità ambedue angolari attorno al centro O. In un moto curvilineo generico, il raggio R e il centro di curvatura sono quelli del cerchio osculatore, il quale si adatta alla curva nel punto considerato e dipende dalla posizione, mentre le espressioni di ac = v^2/R e at = dv/dt rimangono invariate. Per un moto curvilineo piano si ha di nuovo at = $\alpha\mathbf{R}$, dove R è il raggio di curvatura locale della traiettoria. In un moto curvilineo qualsiasi, per il calcolo di at, si deve inserire soltanto la componente dell'accelerazione angolare attorno all'asse istantaneo. Comunque, la maniera più semplice ed unitaria per determinare at dalla velocità in funzione del tempo t, è dv/dt. Per esempio da v = kt^3 con k costante, si ha $(v_1-v)/(t_1-t) = k\,(t_1^3-t^3)/(t_1-t) = k\,(t_1^2+t_1t+t^2)$ che tende a $3kt^2$ per $\mathbf{t_1} \to \mathbf{t}$.

Un corpo rigido, che rotola senza strisciare su un piano di appoggio, è in moto rotatorio attorno all'asse di contatto, detto di istantanea rotazione, variabile nel tempo. In un dato istante, ogni punto dell'oggetto possiede un'accelerazione centripeta ω^2R, tangenziale $\alpha\mathbf{R}$ e totale $\mathbf{R}\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}$ che vanno valutate rispetto all'asse istantaneo sede dei centri di curvatura istantanei. Poiché le accelerazioni dei vari punti in un preciso istante sono proporzionali alle distanze R dall'asse istantaneo, questo può essere inteso anche come centro assiale delle accelerazioni.

Fig.2

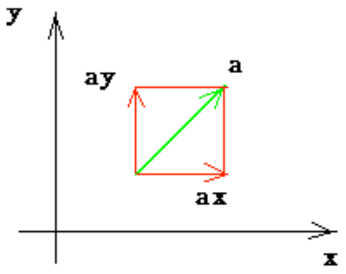
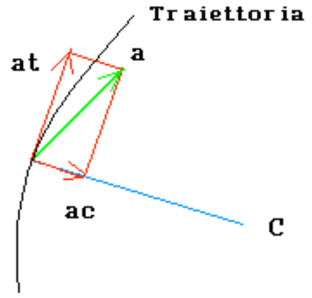


Fig.3



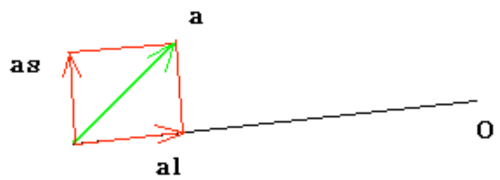


Fig.4

L'accelerazione, essendo un vettore, si può scomporre in componenti ortogonali in infiniti modi. Ma vi sono alcune scomposizioni convenienti in appropriate circostanze, come nelle direzioni assiali cartesiane (fig.2), centripeta e tangenziale (fig.3), radiale e trasversa (fig.4). Usando i versori $\hat{\mathbf{i}}$ e $\hat{\mathbf{j}}$, vettori di modulo unitario degli assi x e y, si ha che la velocità $\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_x \hat{\mathbf{i}} + \mathbf{v}_y \hat{\mathbf{j}}$, dove i pedici indicano le componenti della v lungo gli assi. Poiché i versori sono costanti, per l'accelerazione vale la formula analoga $\vec{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_x \hat{\mathbf{i}} + \mathbf{a}_y \hat{\mathbf{j}}$, in cui $a_x = dv_x/dt$ e $a_y = dv_y/dt$.

Nell'espressione $\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{v}\hat{\mathbf{b}}$, in cui $\hat{\mathbf{b}}$ è il versore della velocità, può variare sia il modulo di $\vec{\mathbf{v}}$ che la sua direzione. Pertanto l'accelerazione è data dalla relazione $\vec{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dt}}\hat{\mathbf{b}} + \mathbf{v}\frac{\mathbf{d}\hat{\mathbf{b}}}{\mathbf{dt}}$. La derivata temporale del versore $\hat{\mathbf{b}}$ è perpendicolare alla traiettoria verso il centro di curvatura e vale $-\omega\hat{\mathbf{R}}$, dove $\hat{\mathbf{R}}$ indica il versore del vettore posizione $\vec{\mathbf{R}}$. Per conseguire questo risultato, si può ripetere il procedimento che dalla velocità del moto circolare uniforme conduce all'accelerazione centripeta. Dunque, abbiamo ritrovato per un moto qualsiasi la formula dell'accelerazione $\vec{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dt}}\hat{\mathbf{b}} - \frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}$ in termini di componenti tangenziale e centripeta. Si vede che nei moti rettilinei, in cui il raggio di curvatura è infinito, si annulla l'accelerazione centripeta e rimane soltanto la componente tangenziale at. Nei moti uniformi il modulo della velocità è costante, perciò svanisce la componente tangenziale at ed agisce solo la componente centripeta ac. Nel moto circolare uniforme sono fissi pure il centro di curvatura e il raggio, e l'accelerazione, costante in modulo, punta sempre verso il centro. Nel moto rettilineo uniforme sono nulle le accelerazioni tangenziale, centripeta e totale.

Nel moto del punto P in un piano g, può essere vantaggioso scegliere uno specifico polo O di g e scomporre l'accelerazione in una componente radiale lungo $\vec{\mathbf{l}} = \overrightarrow{\mathbf{OP}} = \mathbf{l}\hat{\mathbf{l}}$, dove $\hat{\mathbf{l}}$ è il versore

di $\vec{\mathbf{l}}$, e in un'altra trasversa, nella direzione $\hat{\mathbf{s}}$ di g, ortogonale ad $\vec{\mathbf{l}}$ nel verso degli angoli crescenti. Da osservazioni precedenti è emerso che la derivata rispetto al tempo di un versore rotante in g, alla velocità angolare Ω, è Ω volte il versore generato da quello dato, per una rotazione di 90° attorno ad O nel verso impresso da Ω. Quindi, la velocità $\vec{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}} + \mathbf{l}\,\mathbf{d}\hat{\mathbf{l}}/\mathbf{dt} = \dot{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}} + \Omega\mathbf{l}\hat{\mathbf{s}}$, dove il punto indica la derivata rispetto al tempo. Si perviene ad una velocità radiale $\mathbf{v}_l = \dot{\mathbf{l}}$ ed una trasversa $\mathbf{v}_s = \Omega\mathbf{l}$. Tenendo conto che i cinque parametri della velocità dipendono dal tempo e della regola sulla derivata dei versori, si giunge alla formula dell'accelerazione $\vec{\mathbf{a}} = (\ddot{\mathbf{l}} - \Omega^2\mathbf{l})\hat{\mathbf{l}} + (\dot{\Omega}\mathbf{l} + 2\Omega\dot{\mathbf{l}})\hat{\mathbf{s}}$, in cui il primo e secondo termine rappresentano le sue componenti radiale e trasversa. Nonostante la complessità, quest'espressione dell'accelerazione si rivela efficace in alcuni moti, per esempio allorché la forza sia centrale ovvero sia diretta sempre verso un centro O.
Qualora il raggio OP sia perpendicolare alla traiettoria, si deve azzerare v_l perché la velocità risulta tangente al percorso e ciò significa $\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{0}$ e la riduzione dell'accelerazione trasversa, che diventa anche tangenziale, ad $\mathbf{a}_s = \dot{\Omega}\mathbf{l}$. Si dischiude la possibilità di calcolare l'accelerazione tangenziale come prodotto dell'accelerazione angolare per il raggio OP, qualunque sia il polo purché sia dislocato sulla perpendicolare per P al tragitto nel piano del moto. L'accelerazione radiale ha invece la formula $\ddot{\mathbf{l}} - \Omega^2\mathbf{l}$ che in questo caso si identifica con l'accelerazione centripeta v^2/R. Se il centro di curvatura si sovrappone al polo O, si deve annullare anche $\ddot{\mathbf{l}} = \mathbf{0}$ per avere l'uguaglianza delle formule delle accelerazioni centripeta e radiale.
Per mettere a confronto le procedure, applichiamo le scomposizioni cartesiana, tangenziale e centripeta, radiale e trasversa ad una situazione semplice, in cui le tre operazioni forniscono uguali componenti (fig.5).

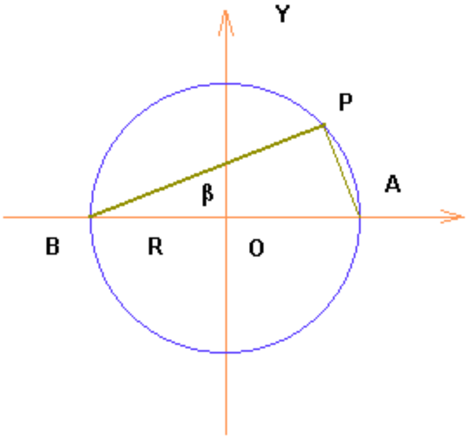


Fig.5

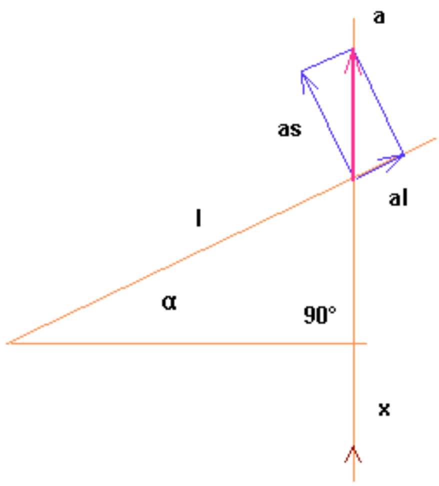


Fig.6

A tale scopo vogliamo calcolare l'accelerazione nella posizione A di un punto in moto circolare uniforme in senso antiorario. Se all'istante iniziale il corpo è in A, le componenti cartesiane

della posizione al tempo t sono $\mathbf{x = R\cos(\omega t)}$ e $\mathbf{y = R\,sen(\omega t)}$. Le velocità diventano $\mathbf{v_x = -\omega R\,sen(\omega t)}$ e $\mathbf{v_y = \omega R\cos(\omega t)}$ e le accelerazioni sono $\mathbf{a_x = -\alpha R\,sen(\omega t) - \omega^2 R\cos(\omega t)}$ e $\mathbf{a_y = \alpha R\cos(\omega t) - \omega^2 R\,sen(\omega t)}$. Al tempo 0 si ricava $\mathbf{a_x = -\omega^2 R}$ e $\mathbf{a_y = \alpha R}$. Si constata che la scomposizione grafica da una parte cartesiana e dall'altra centripeta e tangenziale dà luogo alle stesse componenti nel punto A. Ciò viene confermato dalle ultime due formule trovate.
Per la terza scomposizione portiamo prima il polo O nel centro della circonferenza; giacché l = R = costante, si ha $\mathbf{\dot{l} = \ddot{l} = 0}$ e $\Omega = \omega$ = velocità angolare intorno ad O. La scomposizione radiale e trasversa in A equivale alle altre due in quanto essa fornisce $\mathbf{\vec{a} = -\omega^2 R\hat{R} + \alpha R\hat{s}}$. Se il polo viene portato in B, cambiano l ed Ω, ma le componenti dell'accelerazione in A devono rimanere immutate. Da l = BP = $\mathbf{2R\cos\beta}$, si deduce che $\mathbf{\dot{l} = -2R\Omega sen\beta}$ e $\mathbf{\ddot{l} = -2R\Omega^2\cos\beta - 2R\dot{\Omega}\,sen\beta}$. Per $\mathbf{\beta = 0}$ si ha l = 2R, $\mathbf{\dot{l} = 0}$, $\mathbf{\ddot{l} = -2R\Omega^2}$, $\mathbf{\vec{a} = -4R\Omega^2\hat{l} + \dot{\Omega}\,l\hat{s}}$. Dato che l'angolo $\mathbf{A\hat{O}P = 2\beta}$, la velocità e l'accelerazione angolari di A rispetto ad O sono doppie di quelle relative a B. Ne segue che $\mathbf{\vec{a} = -\omega^2 R\hat{R} + \alpha R\hat{s}}$ come volevasi dimostrare. Se il punto P non coincide con A, le scomposizioni forniscono in genere dei risultati differenti.
Un altro esempio interessante è costituito da un moto rettilineo vario (fig.6); in un sistema cartesiano con l'asse x nella direzione del moto, le componenti y e z dell'accelerazione sono nulle e rimane soltanto la componente a lungo x. L'accelerazione centripeta è zero perché il raggio di curvatura è infinito e l'accelerazione tangenziale è uguale ad a. Invece l'accelerazione radiale è $\mathbf{a_l = a\,sen\alpha}$ e quella trasversa risulta $\mathbf{a_s = a\cos\alpha}$. Si potrebbe dimostrare con calcoli laboriosi che le suddette componenti corrispondono a quelle determinate con la formula generale.