Pasquale Catone

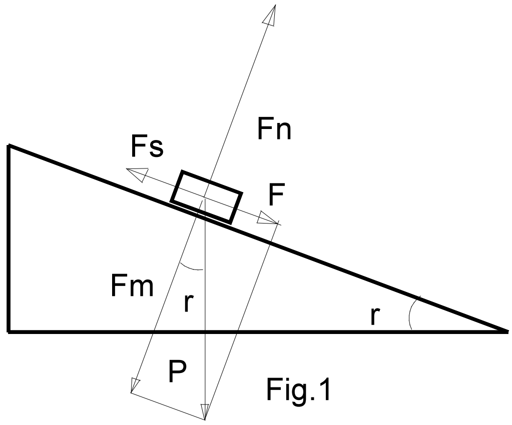
COME SI FORMANO LE VALANGHE

LUGLIO 2004 - SxT Scaffali N°5

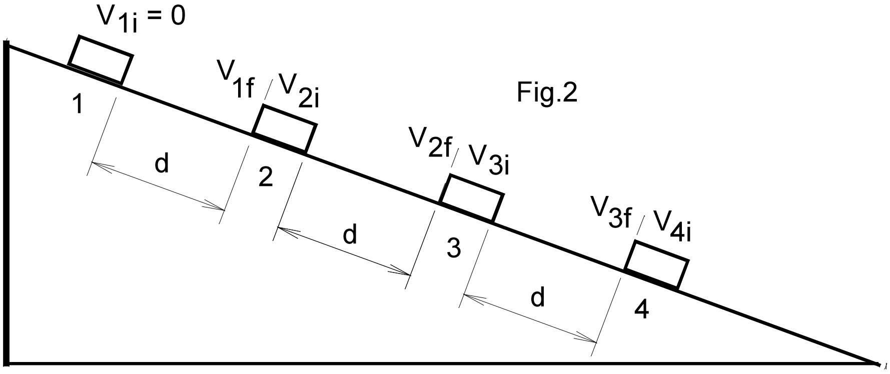
Pasquale Catone

COME SI FORMA UNA VALANGA

Il tipo di equilibrio del corpo indica che la forza di attrito statico Fs è la massima disponibile ed è perfettamente bilanciata dalla componente F del peso P. Ma Fs = fs Fn = fs Fm = fs P cos r, dove fs = coefficiente di attrito statico, Fn = reazione del piano inclinato ortogonale alla superficie del mattone, Fm (pari ad Fn) = componente di P normale al piano, r = angolo d'inclinazione del piano rispetto all'orizzontale (fig.1).



Quando si applica una perturbazione esigua, si distrugge l'equilibrio, il corpo scivola e la forza di attrito Fd = fd Fn = fd P cos r diventa dinamica. Poiché il coefficiente di attrito dinamico fd è in genere minore di quello statico, la massa m acquista un'accelerazione verso il basso a = (F-Fd)/m = (fs-fd)g cos r, in cui g è l'accelerazione di gravità. Si deduce che l'accelerazione a è indipendente dalla massa, finchè sono valide le leggi sull'attrito ed è trascurabile la resistenza dell'aria.
Il quesito viene risolto postulando che l'urto sia istantaneo e ciò comporta la conservazione della quantità di moto all'atto della collisione.
Siano V_{1f}, V_{2f}, V_{3f},… e V_{2i}, V_{3i}, V_{4i}… le velocità delle masse in moto un istante prima e dopo l'urto nelle posizioni indicate (fig.2).



Il moto uniformemente vario indica che $V_{1f}^2 = 2$ a d. Allorché la massa M_1 si unisce a M_2, per la conservazione della quantità di moto, si ha $M_1 V_{1f} = (M_1+M_2) V_{2i}$, ovvero $V_{1f} = 2 V_{2i}$ perché le masse sono uguali. Dopo l'impatto le due masse procedono con accelerazione a e raggiungono la velocità quadratica $V_{2f}^2 = V_{2i}^2 + 2$ a d, cioè $4 V_{2f}^2 = 4 V_{2i}^2 + 4 V_{1f}^2 = V_{1f}^2 + 4V_{1f}^2 = V_{1f}^2 (1+4)$. Nel successivo urto si verifica che $4 V_{2f}^2 = 9 V_{3i}^2$. Per il moto uniformemente vario conseguente, si ottiene $9 V_{3f}^2 = 9 V_{3i}^2 + 9 V_{1f}^2 = 4 V_{2f}^2 + 9 V_{1f}^2 = (1 + 4 + 9) V_{1f}^2$. Questa formula si può facilmente estendere ad n intero positivo qualsiasi, ricavando $n^2 V_{nf}^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 +\ldots+ n^2) V_{1f}^2$. Siccome

$$1^2 + 2^2 + 3^2 +\ldots+ n^2 = (2n^3 + 3n^2 + n)/6 \qquad (1)$$

Risulta $V_{nf}^2 = (2\ n + 3 + 1/n)\ a\ d\ /3$ (2)

La (1) si può stabilire scrivendo una tabella con n righe dei numeri interi da 1 a n, uguagliando le somme di tutti i valori calcolate prima per righe e poi su percorsi a forma di L riflessa (con lati uguali) attorno al vertice in alto a sinistra e utilizzando la formula della somma dei numeri interi $1+2+\ldots+n = (1+n)n/2$. Comunque la (1) si può sempre verificare numericamente.

Se n è sufficientemente grande dalla (2) si desume che

$$V_{nf}^2 = (2\ n + 3)\ a\ d\ /\ 3$$

ha un andamento lineare col numero n di urti. Lo spazio che percorre il corpo 1, fino a n collisioni, è $s = n\ d$, perciò si perviene a

$$\text{variazione di } V_{nf}^2 = (2\ a\ /\ 3) \text{ variazione di } s$$

L'accelerazione media della massa 1, data dal rapporto tra le variazioni di V_{nf}^2 e di 2s, risulta allora a/3 per n elevato.

Si esprimono le seguenti considerazioni finali:

- Il moto del treno fra due urti consecutivi è uniformemente vario con accelerazione a;
- In ogni urto la velocità subisce un calo istantaneo;
- Il moto complessivo non è uniformemente accelerato; la velocità aumenta da zero a V_{1f} proporzionalmente al tempo e diminuisce istantaneamente nel primo urto portandosi a V_{2i}; la velocità riprende l'aumento con la stessa accelerazione a e raggiunge il valore V_{2f} maggiore di V_{1f}, poi si riduce a V_{3i} per l'urto; la velocità ricresce con accelerazione a, quindi diminuisce per l'urto e così continuando;
- Gli urti continui fanno divenire l'accelerazione media 1/3 del valore a, che si ha fra due collisioni consecutive; in sostanza la V_f si attenua per l'urto ed il sistema in un primo momento deve ripristinare la V_f; l'accelerazione effettiva è determinata dal successivo incremento della velocità;
- In un istante prima dell'impatto cioè al termine della fase di accelerazione, la V_{nf}^2 cresce linearmente col numero di urti e, quindi, con lo spazio percorso s (per n rilevante); questo consente di trovare un'accelerazione media prodotta da V_{nf};
- Se il sistema non incontra più ostacoli, l'accelerazione istantanea rimane sempre a.